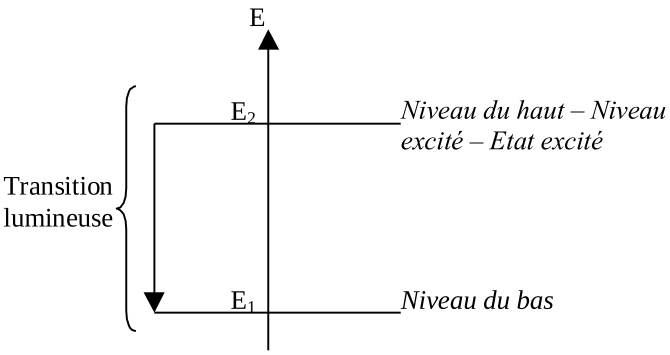
LASER

ESO 2

CHAPITRE I – ATOMES ET PHOTONS

Introduction :

Nous appellerons atomes dans toute la suite un ion, une molécule, un atome ou un radical chimique. Lorsque nous étudierons deux niveaux énergétiques de ces atomes, nous les noterons comme suit :



Nous allons dans cette partie établir la théorie des équations de débit (ou 'rate equations')

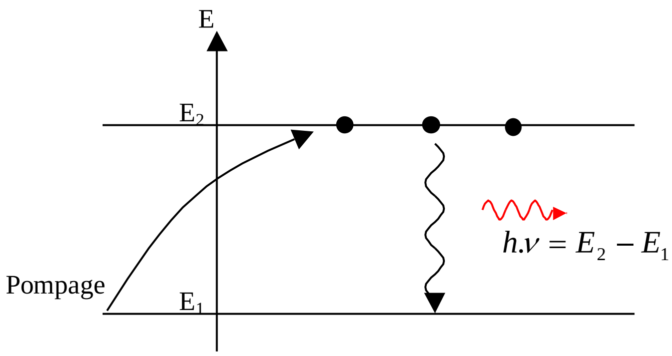
I – Processus mis en jeu

Nous allons parler ici des différents phénomènes de transition radiative (ou lumineuse)

1 – Description qualitative

1.1 – Emission spontanée

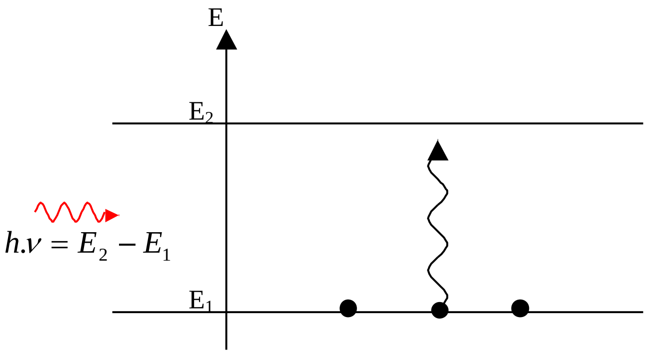
Le pompage permet aux électrons de passer du niveau du bas au niveau du haut.



Un électron en passant spontanément du niveau haut au niveau bas émet un photon d'énergie $h.\nu = E_2 - E_1$. Le photon est réémis dans une direction quelconque et a une phase quelconque.

Rappel : $h = 6{,}62.10^{-34}\,\mathrm{J.s}$

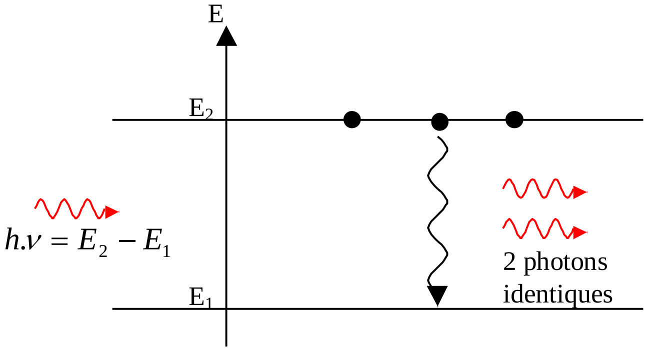
1.2 – Absorption



Un électron peut, en absorbant un photon d'énergie $h.\nu = E_2 - E_1$, passer de l'état bas à l'état haut.

1.3 – Emission stimulée

Le pompage permet aux électrons de passer du niveau du bas au niveau du haut.



Un photon d'énergie $h.\nu = E_2 - E_1$ peut faire passer un électron du niveau haut au niveau bas. Dans ce cas, un second photon de même phase et de même direction que le photon incident est créé.

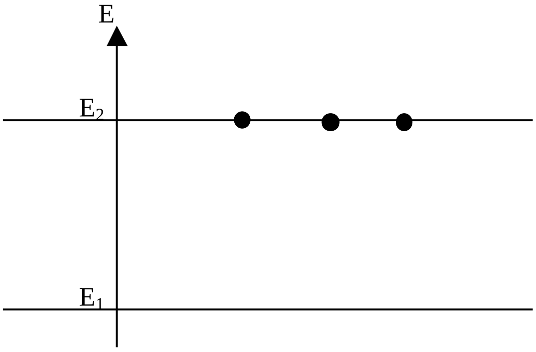
2 – Description quantitative

2.1 – Emission spontanée

Nous définissons A (**coefficient d'Einstein de l'émission spontanée**) comme la probabilité d'émission spontanée d'un photon par un atome dans l'état excité. A s'exprime en s^{-1}.

Durée de vie du niveau du haut :

Nous allons maintenant nous intéresser à la durée de vie du niveau du haut (temps caractéristique durant lequel un électron reste, en terme d'énergie, sur le niveau du haut). Nous allons considérer qu'à un temps initial $t = 0$, il y a N électrons dans le niveau du haut (en fait, nous arrêtons le pompage à $t = 0$).



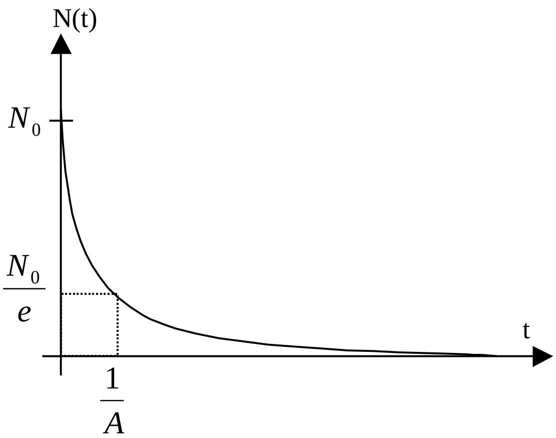
A la date dt, la probabilité pour qu'un atome du niveau d'énergie E_2 se soit désexcité vers le niveau E_1 est $A.dt$. Nous pouvons ainsi calculer la variation dN du nombre d'atomes dans le niveau d'énergie E_2 (variation pendant un temps élémentaire dt autour de la date t) :

$$dN = -N.A.dt$$

En utilisant la dérivée logarithmique $\frac{dN}{N}$ et après résolution, nous obtenons :

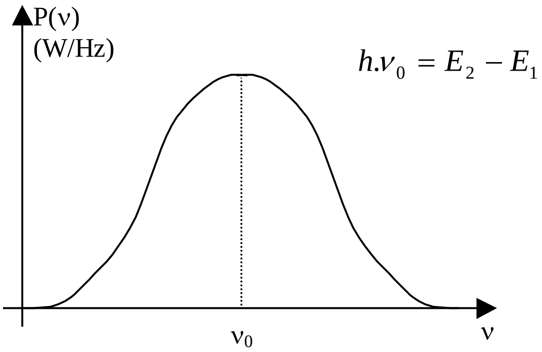
$$\boxed{N = N_0.e^{-A.t}}$$

Nous définissons alors $\boxed{\tau = \frac{1}{A}}$ comme la durée de vie du niveau du haut.



Spectre d'émission spontanée :

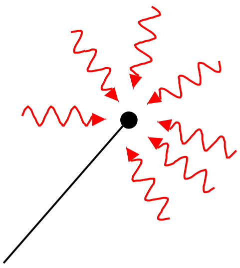
Nous appelons $p(\nu)$ la densité spectrale de puissance.



Si P est la puissance totale émise par émission spontanée, alors nous pouvons définir la forme de raie $f(\nu)$ par :

$$\boxed{\begin{array}{l} p(\nu) = f(\nu).P \\ \int f(\nu).d\nu = 1 \end{array}}$$

2.2 – Absorption et émission stimulée



Les photons incidents ont tous une fréquence ν proche de ν_0. Nous notons U la densité d'énergie (U s'exprime en J.m^{-3}).

La probabilité pour un atome du niveau du bas d'absorber un photon de fréquence ν par seconde est donnée par

$$\boxed{P = B.f(\nu).U}$$

B est appelé le **coefficient d'Einstein de l'émission stimulée**.

De même, la probabilité pour un atome du niveau excité de se désexciter en émettant un photon « stimulé » par seconde est donnée par

$$\boxed{P = B.f(\nu).U}$$

Remarque :

- *Dépendance de la forme de raie : f(ν) intervient dans l'expression des probabilités d'émission stimulée et d'absorption.*

- *Dépendance en U, densité d'énergie. Nous pouvons noter que si $U = 0$, il n'y a ni émission stimulée ni absorption*
- *Absorption et émission spontanée sont deux processus réciproque*

2.3 – Relation entre A et B

Après calcul, nous pourrions montrer que

$$\boxed{B = \frac{c^3}{8.\pi.h.\nu_0^3.n^3}.A}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide
n est l'indice du milieu
ν_0 est la fréquence de transition

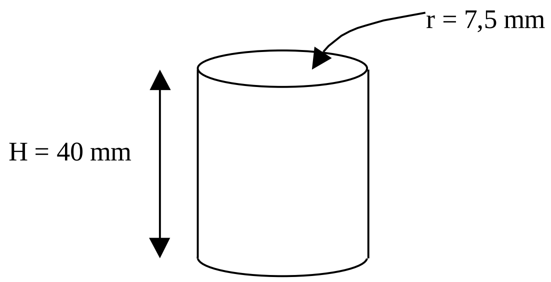
Remarque : lorsque ν_0 augmente, B diminue

2.4 – Compétition entre les deux mécanismes d'émission

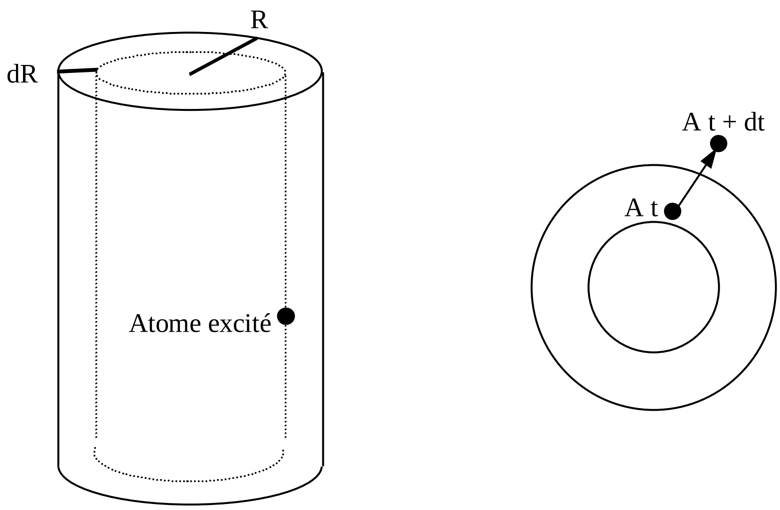
Le but de cette partie est de calculer $\frac{B.f(\nu).U}{A}$ pour caractériser la compétition entre émission stimulée et émission spontanée.

1^er^ cas : lampe spectrale au mercure

Hypothèse : λ = 546 nm $\Delta\nu$ = 3 GHz P = 100 mW (puissance totale émise)



Nous allons dans un premier temps calculer la densité d'énergie $U(t)$. Nous posons $dR = c.dt$.



A $t+dt$, tous les photons présents dans la couronne à t sont sortis. Nous notons E l'énergie émise par la lampe pendant un temps dt. La puissance émise est donc

$$P = \frac{dE}{dt}$$

Par définition,

$$U = \frac{dE}{dV}$$

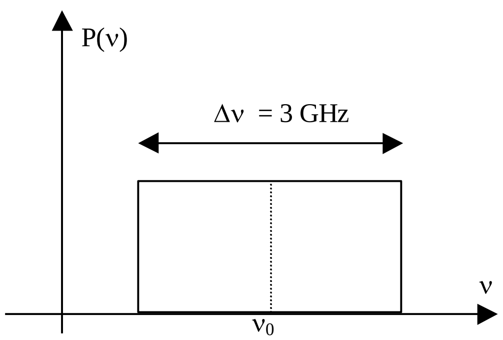
où dV est un volume élémentaire. Ici, $dV = h \times 2.\pi.R \times dR$. Or par choix de dR, nous obtenons donc

$$dV = 2.\pi.R.h.c.dt$$

Soit

$$\boxed{U = \frac{P}{42.\pi.R.c}}$$

Nous allons maintenant aborder le calcul de la forme de raie $f(\nu)$. Nous supposons que la densité spectrale de la source est d'allure :



Nous obtenons ainsi

$$P(\nu) = \frac{P}{\Delta\nu} = P.f(\nu)$$

Soit

$$\boxed{f(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu}}$$

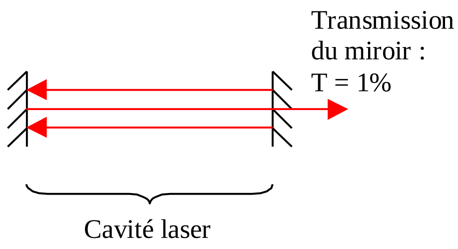
Nous obtenons ainsi une quantification de la compétition entre émissions stimulée et spontanée.

$$\boxed{\frac{B.f(\nu).U}{A} = 5{,}7.10^{-4}}$$

Le phénomène d'émission spontanée est ici largement prépondérant sur le phénomène d'émission stimulée.

<u>2ème cas : Laser He Ne</u>

Nous faisons ici les hypothèses suivantes :



P = 1 mW $\qquad$ $\varnothing_{\text{faisceau}}$ = 1 mm

En effectuant les mêmes calculs, nous pourrions montrer que

$$\boxed{\frac{B.f(\nu).U}{A} = \frac{\lambda_0^3}{8.\pi.h}.\frac{1}{\Delta\nu}.\frac{P}{\pi.R^2c}}$$

Soit

$$\boxed{\frac{B.f(\nu).U}{A} = 0{,}5}$$

L'importance de l'émission stimulée et de l'émission spontanée est la même.

II – Exemples de formes de raie $f(\nu)$

Nous appelons :

- Milieu homogène un milieu dans lequel tous les atomes ont le même spectre d'émission (f(ν) est la même pour tous les atomes). Dans ce cas, nous aurons à faire à une forme de raie homogène.

- Milieu inhomogène un milieu pour lequel tous les atomes n'ont pas le même spectre d'émission (f(ν) différente pour tous les atomes). Dans ce cas, nous aurons à faire à une forme de raie inhomogène.
  Exemple de milieu inhomogène : impuretés dans un cristal, effet Doppler dans un gaz, …

1 – Raie homogène

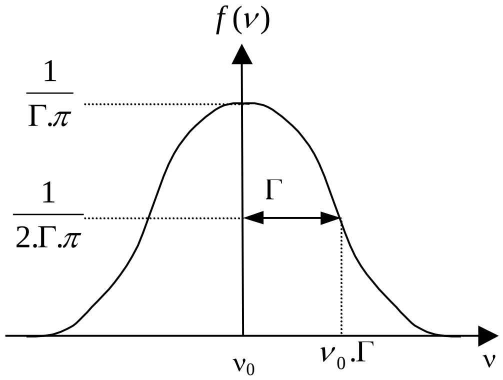
<u>1er exemple : un cristal très pur</u>

Comme le Nd :YAG (Grenat d'Yttrium et d'Aluminium), le Nd^{3+} ou le $Y_3Al_5O_{12}$

La forme de raie est donnée par

$$\boxed{f(\nu) = \frac{1}{\pi}.\frac{\Gamma}{\Gamma^2 + (\nu - \nu_0)^2}}$$

La forme de raie est une fonction lorentzienne de ν



Exemple : Pour le Nd : YAG

$\Gamma = 60\,\text{GHz}$ $\qquad\qquad$ $\lambda_0 = 1064\,\text{nm}$

<u>Origine de l'élargissement homogène</u>

Nous appelons τ_1 la durée de vie du niveau d'énergie E_1 (niveau bas), et τ_2 celle du niveau d'énergie E_2 (niveau haut). La largeur de la forme de raie est alors donnée par

$$\boxed{\Gamma = \frac{1}{4.\pi}.\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)}$$

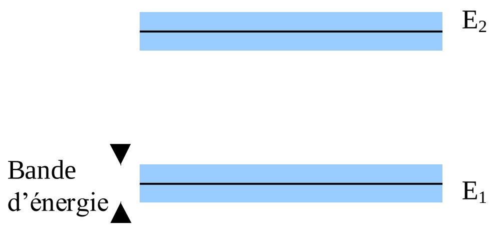
Exemple :

- *Pour le laser Hélium-Néon, pour le néon, τ_1 = 150 ns et τ_2 = 10 ns. Nous calculons ainsi Γ=8,5 MHz. (attention, ceci est la largeur homogène)*

- *Dans le cas de collision dans un gaz, l'élargissement est de l'ordre de 5 – 10 MHz*

<u>Complément : A quoi est du l'élargissement ?</u>

Le principe d'incertitude d'Eisenberg fais qu'il n'est pas possible de connaître exactement le niveau d'énergie sur lequel se trouve l'électron.



Le principe d'Eisenberg parmet de quantifier l'épaisseur de la bande d'énergie dans laquelle peuvent se trouver les électrons.

$$\Delta E.t = \hbar = h/2\pi$$

Pour le niveau 2,

$$\Delta E = h.\Delta\nu_2$$
$$\Delta t = \tau_2$$
$$h.\Delta\nu_2.\tau_2 = \hbar$$

Pour le niveau 1,

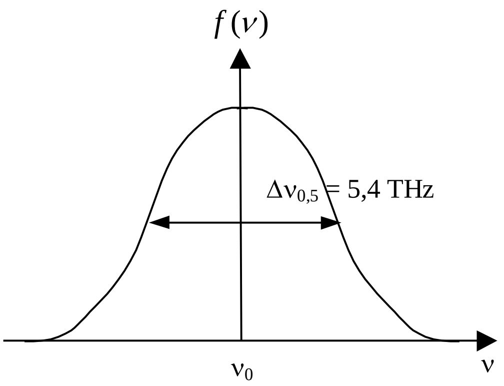
$$h.\Delta\nu_1.\tau_1 = \hbar$$

Nous pouvons ainsi déterminer la largeur $\Delta\nu$ de l'élargissement homogène

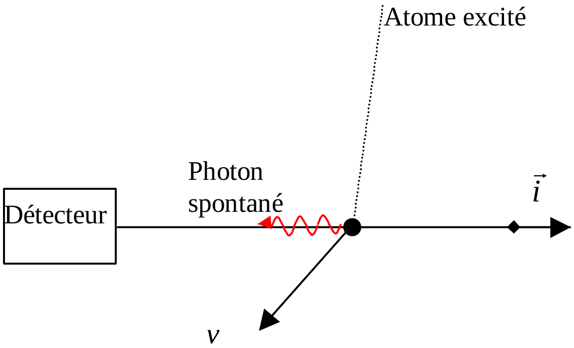
$$\boxed{\Delta\nu = \Delta\nu_1 + \Delta\nu_2 = \frac{1}{2\pi}.\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)}$$

2 – Raie inhomogène

Exemple de milieu inhomogène : Nd : verre (émission autour de λ = 1050 nm)



<u>Expression de l'effet Doppler</u>



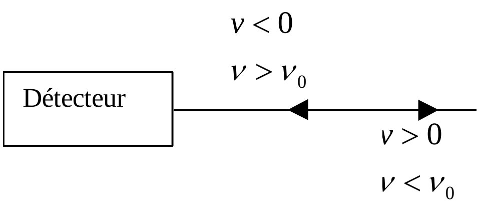
Nous faisons l'hypothèse suivante : dans le référentiel de l'atome, la fréquence du photon émis est ν_0, ce dernier se déplaçant à la vitesse v. Nous cherchons à déterminer la fréquence ν de ce photon « vue » par le détecteur.

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{\vec{\mathrm{v}}.\vec{i}}{c}\right)$$

En posant $\mathrm{v} = \vec{\mathrm{v}}.\vec{i}$, nous obtenons la relation suivante :

$$\boxed{\nu = \nu_0\left(1 - \frac{\mathrm{v}}{c}\right)}$$

Nous pouvons ainsi déterminer deux classes importantes de photons. Dans le cas où v < 0, la fréquence ν vue par le détecteur sera supérieure à ν_0. Dans le cas inverse, si v > 0, la fréquence ν sera inférieure à ν_0.



Nous définissons **la classe de vitesse** comme l'ensemble des atomes ayants la même vitesse. Tous ces atomes, s'ils émettent à la fréquence ν_0, seront vus par le détecteur comme émettant à la fréquence $\nu_{\det} = \nu_0\left(1 - \frac{\mathrm{v}}{c}\right)$.

La forme de raie pour les atomes de la classe de vitesse v devient donc (expression obtenue à partir de la forme lorentzienne de $f(\nu)$ du cas homogène) :

$$\boxed{f_v(\nu_{\det}) = \frac{1}{\pi}.\frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \left(\nu_{\det} - \nu_0\left(1 - \frac{\mathrm{v}}{c}\right)\right)^2}}$$

où Γ est le même que dans le cas homogène.

Nous allons chercher maintenant à déterminer la valeur moyenne $\langle f(\nu_{\det})\rangle$ de la forme de raie indépendamment de la vitesse des atomes. La probabilité de trouver un atome dont la vitesse est comprise entre v et v + dv est $P(\mathrm{v}).d\mathrm{v}$.

$$\boxed{\langle f(\nu_{\det})\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_v(\nu_{\det}).P(\mathrm{v}).d\mathrm{v}}$$

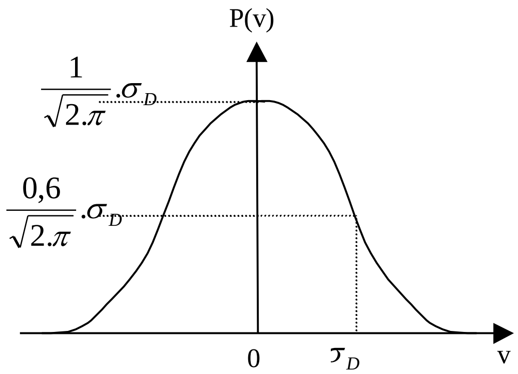
Pour un gaz à la température *T*, la probabilité *P*(v) est donnée par :

$$P(\mathrm{v}) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma_D}.\exp\left(-\frac{\mathrm{v}^2}{2.\sigma_D^2}\right)$$

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{k_B.T}{M}}$$

où *M* est la masse atomique

$k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1}

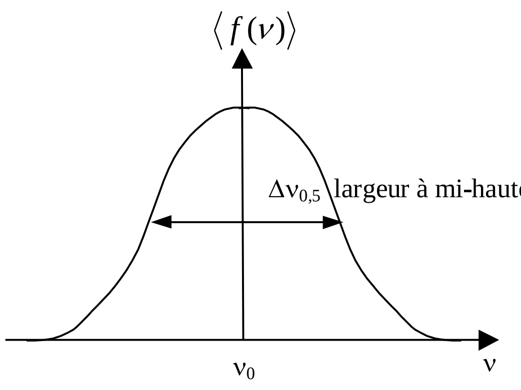


Remarque : Pour un atome qui émet un photon spontanément de fréquence ν_0 à la vitesse σ_D, la fréquence de référence est $\nu_{ref} = \nu_0 . \left(1 - \frac{\sigma_D}{c}\right)$

Dans le cas où l'élargissement Doppler est prédominant, $\frac{\nu_0 . \sigma_D}{c} >> \Gamma$. Nous pouvons ainsi déterminer une expression de la valeur moyenne de la forme de raie

$$\boxed{\left\langle f(\nu) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} . \frac{1}{\sigma_D} . \frac{c}{\nu_0} . \exp\left[- \frac{\left(\frac{c}{\nu_0} (\nu - \nu_0) \right)^2}{2.\sigma_D^2} \right]}$$

L'allure de la forme de raie est donc



où

$$\boxed{\Delta\nu_{0,5} = \sqrt{8.\ln 2} . \sigma_D . \frac{\nu_0}{c}}$$

Application numérique :

$M = 20{,}17 * 1{,}66.10^{-27}$ kg

$T = 300$ K

$\lambda_0 = 633$ nm

$\Delta\nu = 1{,}3$ GHz (à comparer avec $\Gamma = 8{,}5$ MHz)

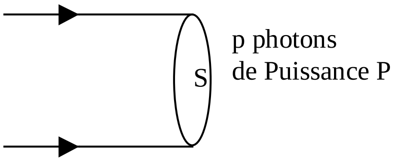
III – Section efficace

1 – « Intensité » laser

Définitions de l'intensité:

Nous notons p le nombre de photons traversant la surface S du faisceau lumineux par seconde, et P la puissance de ce faisceau (en Watt) définit par

$$P = h.\nu.p$$



Le nombre de photons par unité de temps et par unité de surface (intensité photonique) est donné par

$$\boxed{I = \frac{p}{S}} \text{ en } s^{-1}\, m^{-2}$$

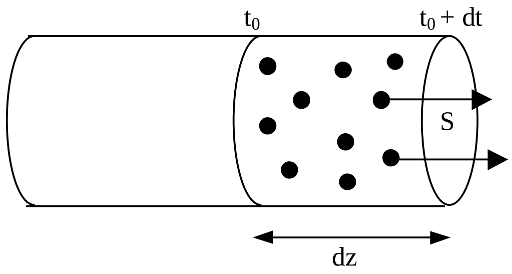
De même, la puissance traversant l'unité de surface pendant l'unité de temps (intensité énergétique) est donnée par

$$\boxed{\Im = \frac{P}{S}} \text{ en } W.m^{-2}$$

Relation entre l'intensité photonique I et la densité d'énergie U :

Les hypothèses de départ sont les suivantes :

- La densité U d'énergie est la même dans tout le faisceau
- L'indice du milieu est n



La portion dz du faisceau est choisie de la manière suivante :

$$dz = \frac{c}{n}.dt$$

A la date $t_0 + dt$, tous les photons présents dans le volume $dV = S.dz$ sont sortis. Ainsi

$$U \times S.dz = p.h.\nu.dt$$

Soit, en utilisant la définition de l'intensité photonique

$$U.\frac{c}{n} = I.h.\nu$$

Ou encore

$$\boxed{I = \frac{c}{n}.\frac{1}{h.\nu}.U}$$

2 – Section efficace

La probabilité pour un atome d'émettre un photon de manière stimulée est donnée par

$$P = B.f(\nu).U = B.f(\nu).\frac{n}{c}.h.\nu.I$$

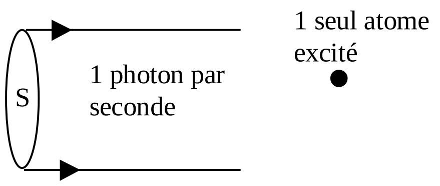
Nous définissons la section efficace σ par

$$\boxed{\sigma(\nu) = B.f(\nu).\frac{n.h.\nu}{c}}$$

Remarque :

- *$\sigma(\nu).I$ est aussi la probabilité qu'à un atome dans l'état bas d'absorber un photon*
- *A propos du terme de 'section efficace'*

Dans le cas où p = 1 photon / s



$\sigma.I$ est la probabilité pour qu'en une seconde, l'atome se désexcite en émettant un photon stimulé.

Par définition

$$I = \frac{p}{S}$$

Soit

$$\sigma.I = \sigma.\frac{1}{S} = \frac{\sigma}{S}$$

IV – Equation de population

Dans cette partie, nous ne nous préoccuperons pas de la forme de raie. Autrement dit,

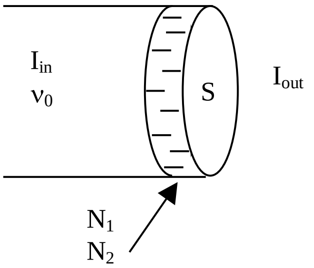
$$\sigma = \sigma(\nu_0)$$

La section efficace est donnée par

$$\sigma = \frac{B.n.h.\nu_0}{c}$$

1 – Importance de la différence de population entre les niveaux bas et haut

Nous notons ici N_i le nombre d'électrons au niveau d'énergie E_i. Comme nous avons eu l'habitude de faire jusqu'à présent, l'indice 1 est consacré au niveau du bas, et l'indice 2 au niveau du haut. Nous noterons également $\Delta N = N_2 - N_1$.



Nous faisons ici l'hypothèse suivante : nous négligerons l'émission spontanée dans l'axe du faisceau.

Le nombre de photons absorbés par seconde est

$$\sigma.I_{in}.N_1$$

Le nombre de photons émis par émission stimulée est

$$\sigma.I_{in}.N_2$$

L'intensité en sortie du faisceau est donc donnée par la relation :

$$\boxed{I_{out} = I_{in} + \frac{\sigma.I_{in}}{S}.(N_2 - N_1)}$$

Il y a donc amplification si ΔN est positif. Il faut réaliser une inversion de population.

Remarque : A l'équilibre thermodynamique,

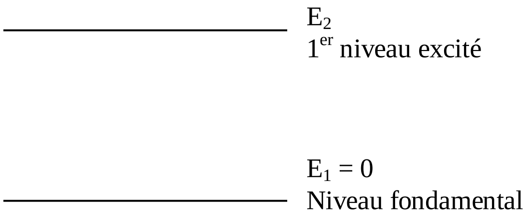
$$N_2 = N_1.\exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k.T}\right)$$

Donc, $N_2 < N_1$, ou encore $\Delta N < 0$

2 – Système à deux niveaux

<u>Introduction :</u>

Nous étudions le problème suivant



Nous définissons ν_0 par $h.\nu_0 = E_2 - E_1$

Le pompage optique est l'apport d'atomes dans l'état excité par absorption. Nous considérerons que notre atome est sous l'effet de pompage optique d'intensité I_p (le faisceau de pompage est ici également le faisceau amplifié). Nous noterons n_1 et n_2 la densité de population des niveaux 1 et 2 (ou encore, le nombre d'atome par m^3). $\sigma = \sigma_0$ est la section efficace pour la transition de l'état 1 vers l'état 2.

Remarque : Pour une fréquence optique ν_0 à une température ambiante $T = 300K$

$$h.\nu_0 >> k.T$$

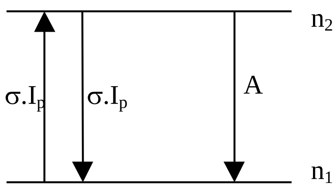
A l'équilibre thermodynamique,

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(-\frac{h.\nu_0}{k.T}\right) << 1$$

A l'équilibre thermodynamique, $n_2 \approx 0$

<u>Schéma de débit :</u>

Le but ici est de calculer la différence de population $\Delta n = n_2 - n_1$.



Nous notons dn_1 la variation de population du niveau 1 pendant un temps élémentaire dt.

$$dn_1 = n_2.A.dt + n_2.\sigma.I_p.dt - n_1.\sigma.I_p.dt$$

$$\boxed{\frac{dn_1}{dt} = n_2.A + n_2.\sigma.I_p - n_1.\sigma.I_p}$$

Remarque :

- *De même*

$$\frac{dn_2}{dt} = -n_2.A - \sigma.I_p.(n_2 - n_1)$$

- $n_1 + n_2 = n_{\text{total}}$ *est la densité totale de population*
- $\dfrac{dn_2}{dt} = -\dfrac{dn_1}{dt}$

Résolution du problème dans l'état stationnaire :

Les hypothèses faîtes ici sont les suivantes :

- du fait d'un pompage optique continu, n_1 et n_2 sont maintenues constantes
- $\dfrac{dn_1}{dt} = 0$ (cette hypothèse se déduit de la première)

Nous notons $n_t = n_1 + n_2$ la densité totale de population.

Les hypothèses imposent

$$n_2.A + n_2.\sigma.I_p - n_1.\sigma.I_p = 0$$

Après résolution de cette équation, nous obtenons les solutions suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} n_1 &= \frac{A + \sigma.I_p}{A + 2.\sigma.I_p}.n_t \\ n_2 &= \frac{\sigma.I_p}{A + 2.\sigma.I_p}.n_t \end{aligned}}$$

Soit

$$\boxed{\Delta n = n_2 - n_1 = -\frac{A}{A + 2.\sigma.I_p}.n_t}$$

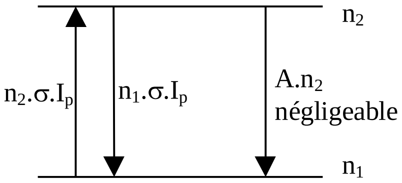
$\Delta n < 0$, il n'y a pas d'amplification, il n'y a qu'absorption.

Raisons physiques expliquant le résultat $\Delta n < 0$:

Nous nous plaçons dans le cas suivant :

$I_p = 0$ $\Delta n = -n_t$ $n_1 = n_t$ $n_2 = 0$

Pour avoir $\Delta n = 0$, il faudrait que $\frac{n_t}{2}$ électrons montent dans l'état excité.



Si I_p est très grand, Δn tendra vers 0

$$\frac{dn_2}{dt} \approx \sigma.I_p(n_1 - n_2) = \sigma.I_p(n_t - 2.n_2)$$

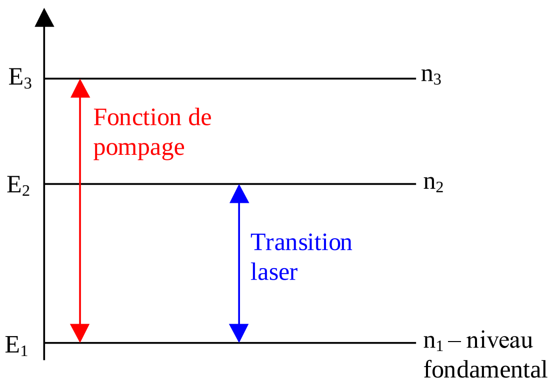
$$n_2 = \frac{n_t}{2}.\left(1 - \exp\left(-\frac{2.t}{\sigma.I_p}\right)\right) \to \frac{n_t}{2}$$

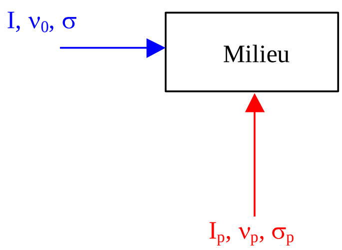
A l'état stationnaire, $n_1 = n_2$. Autrement dit, l'émission stimulée 'vide' le niveau du haut ; un électron monté dans l'état haut en excédent redescendra automatiquement par émission stimulée. Il n'y a pas d'inversion de population.

3 – Système à trois niveaux

Définitions :

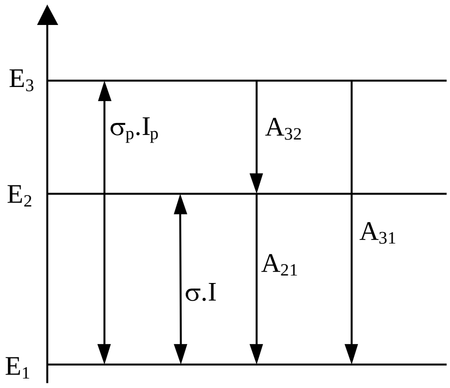
Là encore, nous supposerons l'atome sous l'effet de pompage optique. Le problème étudié est le suivant





où $h.\nu_0 = E_2 - E_1$ et $h.\nu_p = E_3 - E_1$

Les différentes probabilités de passage d'un niveau énergétique à un autre pour un électron sont notées comme suit :

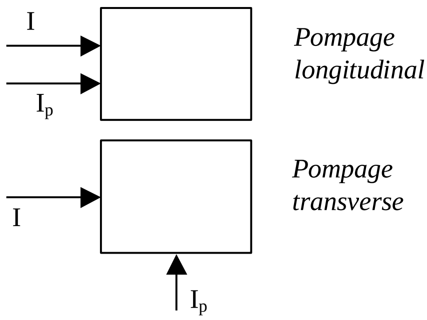


Les hypothèses sont les suivantes :

- $A_{32} >> A_{31}$
- $A_{32} >> \sigma_p.I_p$
- Le passage de l'état 3 vers l'état 2 est favorisé

Remarque : à propos de la 'géométrie de pompage'

Il existe deux types de pompage



<u>Equations de population :</u>

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{dn_1}{dt} &= A_{31}.n_3 + A_{21}.n_2 + \sigma_p.I_p.n_3 + \sigma.I.n_2 - \sigma_p.I_p.n_1 - \sigma.I.n_1 \\
\frac{dn_2}{dt} &= A_{32}.n_3 + \sigma.I.n_1 - A_{21}.n_2 - \sigma.I.n_2 \\
\frac{dn_3}{dt} &= \sigma_p.I_p.n_1 - A_{32}.n_3 - A_{31}.n_3 - \sigma_p.I_p.n_3
\end{aligned}}$$

Calcul de $\Delta n = n_2 - n_1$ dans le cas où nous effectuons un pompage optique continu (état stationnaire)

L'hypothèse d'état stationnaire impose

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{dn_2}{dt} = \frac{dn_3}{dt} = 0$$

Le système d'équations à résoudre est le suivant

$$\begin{cases} A_{32}.n_3 + \sigma.I.n_1 - A_{21}.n_2 - \sigma.I.n_2 = 0 & (1) \\ \sigma_p.I_p.n_1 - A_{32}.n_3 - A_{31}.n_3 - \sigma_p.I_p.n_3 = 0 & (2) \\ n_1 + n_2 + n_3 = n_t & (3) \end{cases}$$

L'équation (2) donne

$$n_3 = \frac{\sigma_p.I_p.n_1}{A_{32} + A_{31} + \sigma_p.I_p} \approx \frac{\sigma_p.I_p.n_1}{A_{32}}$$

L'équation (1) donne

$$\sigma_p.I_p.n_1 + \sigma.I.n_1 - A_{21}.n_2 - \sigma.I.n_2 = 0$$

Soit

$$n_2 = \frac{\sigma_p.I_p + \sigma.I}{A_{21} + \sigma.I}.n_1$$

L'équation (3) donne

$$1 + \frac{n_2}{n_1} + \frac{n_3}{n_1} = \frac{n_t}{n_1}$$

Soit

$$\frac{n_t}{n_1} = 1 + \frac{\sigma_p.I_p + \sigma.I}{A_{21} + \sigma.I} + \frac{\sigma_p.I_p}{A_{32}}$$

Or par hypothèse, $\frac{\sigma_p.I_p}{A_{32}} << 1$.

Donc

$$\boxed{n_1 = n_t.\frac{A_{21} + \sigma.I}{A_{21} + 2.\sigma.I + \sigma_p.I_p}}$$

Nous pouvons ainsi calculer la valeur de n_2

$$\boxed{n_2 = \frac{\sigma_p I_p + \sigma.I}{A_{21} + 2.\sigma.I + \sigma_p.I_p}.n_t}$$

Nous calculons maintenant l'écart de population Δn

$$\boxed{\Delta n = \frac{\sigma_p.I_p - A_{21}}{A_{21} + 2.\sigma.I + \sigma_p.I_p}.n_t}$$

Nous déduisons de l'expression de Δn qu'il y aura amplification à la condition que

$$\boxed{\sigma_p.I_p > A_{21}}$$

où $\sigma_p.I_p$ caractérise le chargement du niveau 2, et A_{21} représente la 'vidange' du niveau 2 si $I = 0$.

$$A_{21} + 2.\sigma.I + \sigma_p.I_p > A_{21} + A_{21} + 2.\sigma.I$$

$$A_{21} + 2.\sigma.I + \sigma_p.I_p > (A_{21} + \sigma.I)$$

$$1 > 2.\frac{n_1}{n_t}$$

La condition d'amplification est donc

$$\boxed{n_1 < \frac{n_t}{2}}$$

<u>Intensité de saturation :</u>

Nous pouvons écrire l'expression de Δn sous la forme suivante

$$\Delta n = n_t.\frac{\sigma_p.I_p - A_{21}}{(A_{21} + \sigma_p.I_p).\left(1 + \frac{2.\sigma.I}{A_{21} + \sigma_p.I_p}\right)}$$

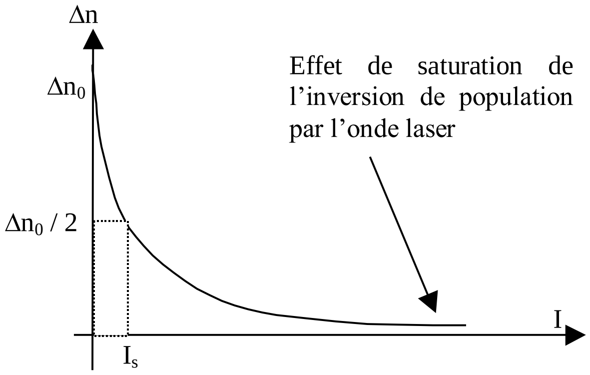
En posant

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta n_0 &= \frac{\sigma_p.I_p - A_{21}}{A_{21} + \sigma_p.I_p}.n_t \\ I_s &= \frac{A_{21} + \sigma_p.I_p}{2.\sigma} \end{aligned}}$$

L'expression de Δn devient

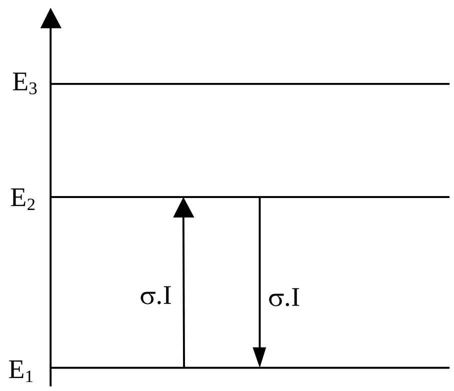
$$\boxed{\Delta n = \frac{\Delta n_0}{1 + \dfrac{I}{I_s}}}$$

I_s est l'intensité de saturation.



Origine physique de la saturation :

Δn tend vers 0 quand I tend vers l'infini. Si I est très grand, les passages prépondérants entre les différents niveaux d'énergie sont les suivants :



D'où

$$\frac{dn_2}{dt} = \sigma.I.n_1 - \sigma.I.n_2$$

Dans l'état stationnaire,

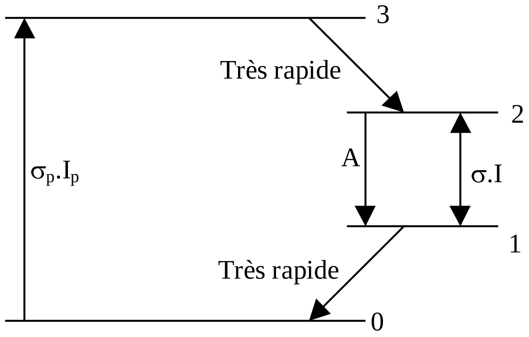
$$\Delta n = n_2 - n_1 = 0$$

4 – Système à quatre niveaux

L'idéal pour un laser est le système à quatre niveaux. Il existe deux types de système à quatre niveaux :

- Si $E_1 - E_0 >> k.T$, $n_1 = 0$ (à T = 300 K). Ceci est un **système à quatre niveaux pur**

- Si $E_1 - E_0$ est de l'ordre de quelques $k.T$, $n_1 \neq 0$. Ceci est un **système à quasi trois niveaux.**



Le débit A_{32} du niveau 3 au niveau 2 est très important comparé aux autres débits mis en jeu.

Remarque : les transitions des niveaux 3 à 2 et 1 à 0 peuvent être non radiatives. L'émission de lumière est alors remplacée par l'émission de chaleur.

Le débit de transition entre les niveaux 3 et 2 est parfois noté γ ou A_{NR}

Après calcul, nous obtenons les résultats suivants :

$$\boxed{\Delta_n = \frac{\Delta n_0}{1 + \dfrac{I}{I_s}}}$$

où

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta n_0 &= n_t . \frac{\sigma_p . I_p}{A + \sigma_p . I_p} \\ I_s &= \frac{\sigma_p . I_p + A}{\sigma} \end{aligned}}$$

Pour le détail des calculs, voir le TD n°1

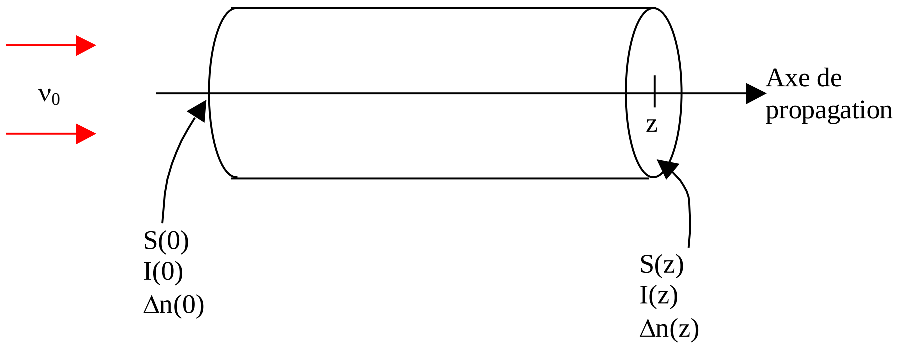
Dans un système à quatre niveaux, il y a amplification à la seule condition que $I_p \neq 0$.

CHAPITRE II – AMPLIFICATION OPTIQUE

I – Evolution de l'intensité du faisceau à amplifier

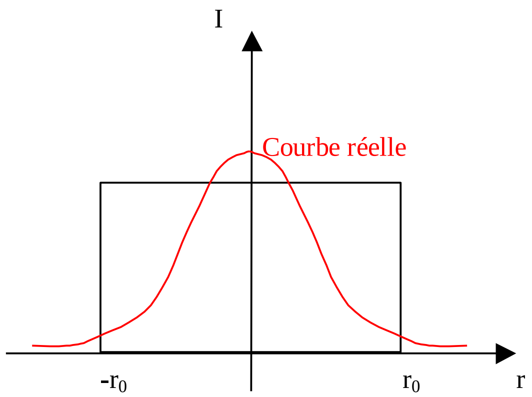
1 – Hypothèse et définitions préliminaires

Comme précédemment, nous nous intéressons à un système à deux niveaux d'énergie. L'indice 1 sera consacré au niveau du bas, et l'indice 2 à celui du haut. Nous considérerons que la section efficace $\sigma = \sigma(\nu_0)$. Le problème étudié dans tous le chapitre sera, à quelques variantes près, le suivant :



Nous noterons dans la suite θ la demi-divergence du faisceau laser.

Le spectre de la source sera considéré comme carré



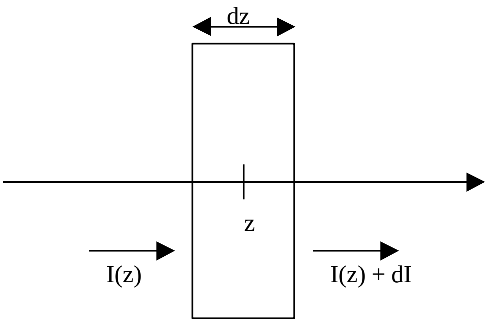
L'intensité variant à mesure que la lumière pénètre dans le milieu amplificateur, nous noterons α le coefficient des pertes réparties dans ce milieu. α est définit comme suit

$$\boxed{dI = -\alpha . I . dz}$$

où dI est la variation de l'intensité due aux pertes réparties. α s'exprime en m^{-1}

2 – Loi d'évolution de l'intensité

Nous nous intéressons au problème suivant :



Le nombre de photons apportés par seconde au faisceau par émission stimulée au passage dans la tranche *dz* est donné par

$$\boxed{dp_{\text{stim}} = \sigma.I.n_2.S.dz}$$

Le nombre de photons absorbés par seconde par la tranche *dz* est donné par

$$\boxed{dp_{\text{abs}} = \sigma.I.n_1.S.dz}$$

Le nombre de photons perdus par seconde à cause des pertes réparties est donné par

$$\frac{dI}{dz} = -\alpha.I$$

$$\boxed{dp_{\text{perdu}} = S.\left|dI\right| = S.\alpha.I.dz}$$

Le nombre de photons spontanés récoltés par seconde par le faisceau au passage dans la tranche dz est donné par

$$dp_{\text{spont}} = dp_{\text{spontané total émis par la tranche}} \cdot \frac{\Omega}{4.\pi}$$

où Ω est l'angle solide du faisceau

(seuls sont récupérés les photons spontanés qui 'tombent' dans le faisceau d'angle solide Ω)

$$\Omega = 2.\pi.(1-\cos\theta) \text{ et } dp_{\text{spontané total émis par la tranche}} = A.n_2.S.dz$$

Donc

$$\boxed{dp_{\text{spont}} = A.n_2.S.dz.\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

Nous supposerons à partir de maintenant que θ est petit. Après développement limité sur θ, l'expression du nombre de photons spontanés émis devient

$$dp_{\text{spont}} = A.n_2.S.dz.\frac{\theta^2}{4}$$

Nous allons maintenant calculer la variation totale du nombre de photons dans le faisceau au passage dans la tranche *dz*.

$$dp_{\text{total}} = dp_{\text{stim}} + dp_{\text{spont}} - dp_{\text{abs}} - dp_{\text{perdu}}$$

$$dp_{\text{total}} = \sigma.I.n_2.S.dz + A.n_2.S.dz.\frac{\theta^2}{4} - \sigma.I.n_1.S.dz - S.\alpha.I.dz$$

Par définition,

$$dI = \frac{dp}{S}$$

Nous pouvons donc déterminer la variation d'intensité du faisceau au passage dans la tranche *dz* :

$$dI = \sigma.I.\Delta n.dz + A.n_2.\frac{\theta^2}{4}.dz - \alpha.I.dz$$

$$\boxed{\frac{dI}{dz} = \sigma.I.\Delta n + A.n_2.\frac{\theta^2}{4} - \alpha.I}$$

3 – Gain linéique

le gain linéique *g* est, par définition, le gain par unité de longueur

$$\boxed{\underset{m^{-1}}{g} = \underset{m^{2}}{\sigma}.\underset{m^{-3}}{\Delta n}}$$

L'expression de la variation d'intensité du faisceau en fonction du gain linéique devient donc :

$$\boxed{\frac{dI}{dz} = A.n_2.\frac{\theta^2}{4} + (g - \alpha).I}$$

Nous pouvons également définir le gain linéique 'petit signal' g_0 ($I << I_S$). Par définition,

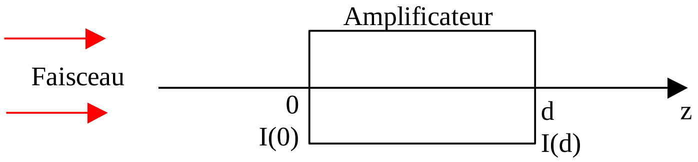
$$\boxed{g_0 = \sigma.\Delta n_0}$$

Rappel :

$$\Delta n = \frac{\Delta n_0}{1 + \frac{I}{I_s}}$$

4 – Intensité en sortie de l'amplificateur

Le problème étudié dans cette partie est le suivant :



4.1 – Emission spontanée

Les hypothèses faîtes dans cette partie sont les suivantes :

- Il n'y a pas de faisceau à l'entrée du milieu amplificateur. Autrement dit $I(0) = 0$.
- $\Delta n(z) = Cte = \Delta n_0$
- $n_2(z) = Cte$
- $g = \sigma.\Delta n = g_0$ (gain petit signal du fait que $I(0) = 0$ et I reste faible devant I_s pour notre étude)

En reprenant l'expression de la variation d'intensité trouvée plus tôt :

$$\frac{dI}{dz} = A.n_2.\frac{\theta^2}{4} + (g_0 - \alpha).I$$

La solution de cette équation exprimée à la côte $z = d$ est

$$\boxed{I(d) = \frac{\theta^2}{4}.\frac{A.n_2}{g_0 - \alpha}.\left(e^{(g_0-\alpha).d} - 1\right)}$$

L'intensité trouvée en *d*, vu qu'il n'y a pas d'onde lumineuse entrant dans le milieu amplificateur, est en fait l'intensité due à l'émission spontanée amplifiée par le milieu. Cette intensité 'spontanée' sera d'autant plus importante que :

- le gain g_0 est important

  exemple : HeNe ($\lambda_{émission}$ = 3,39 µm), Ne ($\lambda_{émission}$ = 337 nm), semi-conducteurs

- la longueur d du milieu est grande

  exemple : fibre optique amplificatrice dopée soit à l'Er^{3+} (longueur de quelques mètres, $\lambda_{émission}$ = 1,5 µm) soit à Yb^{3+} ($\lambda_{émission}$ de l'ordre de 1 µm)

Cette émission spontanée amplifiée est en fait un bruit. En effet, le signal « spontané » ne possède pas les qualités voulus en matière de phase, cette dernière étant aléatoire. Ainsi, si nous introduisons un faisceau lumineux à l'entrée de notre milieu amplificateur, nous nous retrouverons avec la superposition d'une onde de phase parfaitement contrôlée (émission stimulée) et d'une onde totalement incontrôlable (émission spontanée)

$$I_{\text{total}} = I(z) + I_{\text{spontané amplifié}}$$

Avec le gain linéique égal à

$$g(z) = \frac{\sigma.\Delta n_0}{1 + \frac{I_{\text{total}}}{I_s}}$$

Si le bruit du à l'émission spontanée est important, le gain linéique diminue : le faisceau signal est moins amplifié, puisque l'émission spontanée « consomme » elle aussi de l'inversion de population.

4.2 – En négligeant l'émission spontanée

Nous allons maintenant résoudre l'équation donnant $\frac{dI}{dz}$ dans le cas où l'émission spontanée amplifiée est négligeable.

$$\frac{dI}{dz} = \frac{\sigma.\Delta n_0.I}{1 + \frac{I}{I_s}} - \alpha.I$$

Nous cherchons à déterminer *I*(*d*) lorsque *I*(0) est non nulle. Il existe deux cas particulier intéressant :

- **Cas 1 :** Si $I(z) << I_s$

$$\frac{dI}{dz} = (\sigma.\Delta n_0 - \alpha).I = (g - \alpha).I$$

Ainsi,

$$\boxed{I(z) = I(0).e^{(g_0 - \alpha).z}}$$

$$I(d) = I(0).e^{(g_0 - \alpha).d}$$

- **Cas 2 :** Si $I(z) >> I_s$

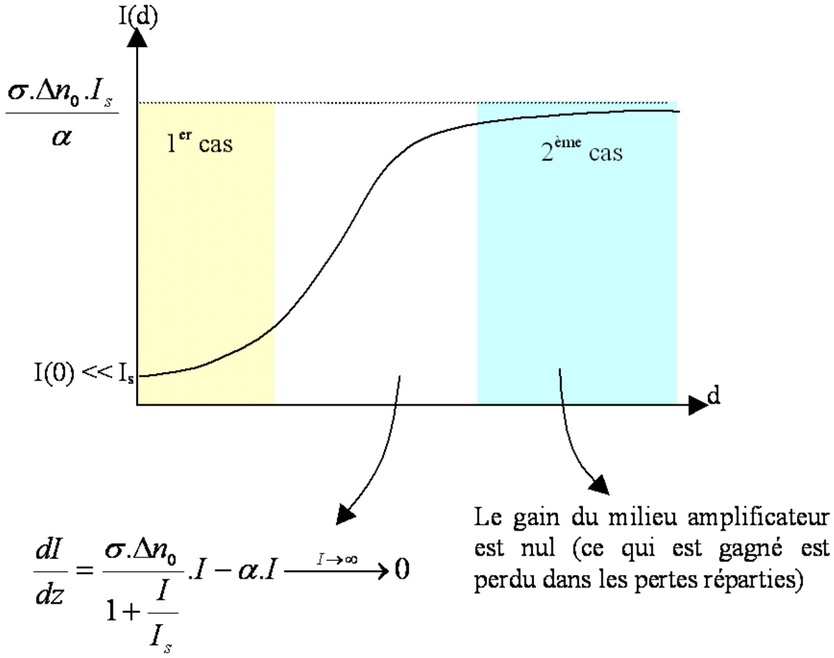
$$\frac{dI}{dz} = \sigma.\Delta n_0.I_s - \alpha.I$$

Ainsi

$$\boxed{I(z) = \frac{\sigma.\Delta n_0}{\alpha}.I_s + C.e^{-\alpha.z}}$$

où *C* dépend des conditions initiales (*I*(0) entre autre)

Nous allons tracer maintenant l'intensité $I(d)$ en fonction de d



<u>Dans le cas où nous négligeons les pertes réparties ($\alpha = 0$)</u>

L'expression de la variation d'intensité devient

$$\frac{dI}{dz} = \frac{\sigma.\Delta n_0}{1+\dfrac{I}{I_s}}.I$$

Soit

$$dI.\left(1+\frac{I}{I_s}\right).\frac{1}{I} = \sigma.\Delta n_0.dz$$

$$\frac{dI}{I} + \frac{dI}{I_s} = \sigma.\Delta n_0.dz$$

En intégrant cette équation entre 0 et d, nous obtenons

$$\boxed{\ln\left(\frac{I(d)}{I(0)}\right) + \frac{I(d)-I(0)}{I_s} = \sigma.\Delta n_0.d}$$

5 – Gain effectif

<u>Définitions :</u>

La définition du gain effectif est la suivante

$$\boxed{G = \frac{I(d)}{I(0)}}$$

Il est également possible de parler de gain effectif en décibels. Alors, ce gain s'écrit

$$G_{dB} = 10.\log_{10} G$$

Nous pouvons parfois également être amenés à parler de gain effectif par unité de longueur (*voir TD 2)*

$$\frac{G_{dB}}{d}$$

où d est la longueur du milieu amplificateur

Nous définissons maintenant le gain effectif petit signal G_0

$$G_0 = \exp\left((\sigma.\Delta n - \alpha).d\right)$$

Le gain effectif petit signal G_0 et le gain effectif G sont égaux lorsque $I << I_s$

<u>Courbe du gain effectif en fonction de $I(0)$:</u>

Nous allons étudier deux cas :

- $I(0) << I_s$ et $I(z) << I_s$

$$G = G_0 = \exp\left((\sigma.\Delta n - \alpha).d\right)$$

- $I(0) >> I_s$ et $I(z) >> I_s$

$$I(z) = \frac{g_0.I_s}{\alpha} + C.e^{-\alpha.z}$$

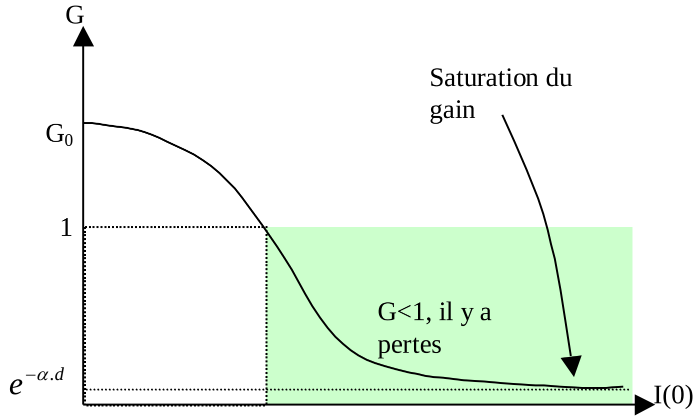
Comme $I(0)$ est connue, nous pouvons déterminer la valeur littérale de C

$$C = I(0) - g_0.\frac{I_s}{\alpha}$$

Soit

$$G = \frac{g_0 I_s}{\alpha..I(0)}.\left(1 - e^{-\alpha.d}\right) + e^{-\alpha.d}$$

La courbe est la suivante



Nous remarquons donc que si I devient trop important,

$$\frac{dI}{dz} = g.I - \alpha.I < 0$$

Il y a pertes.

6 – Intensité extraite

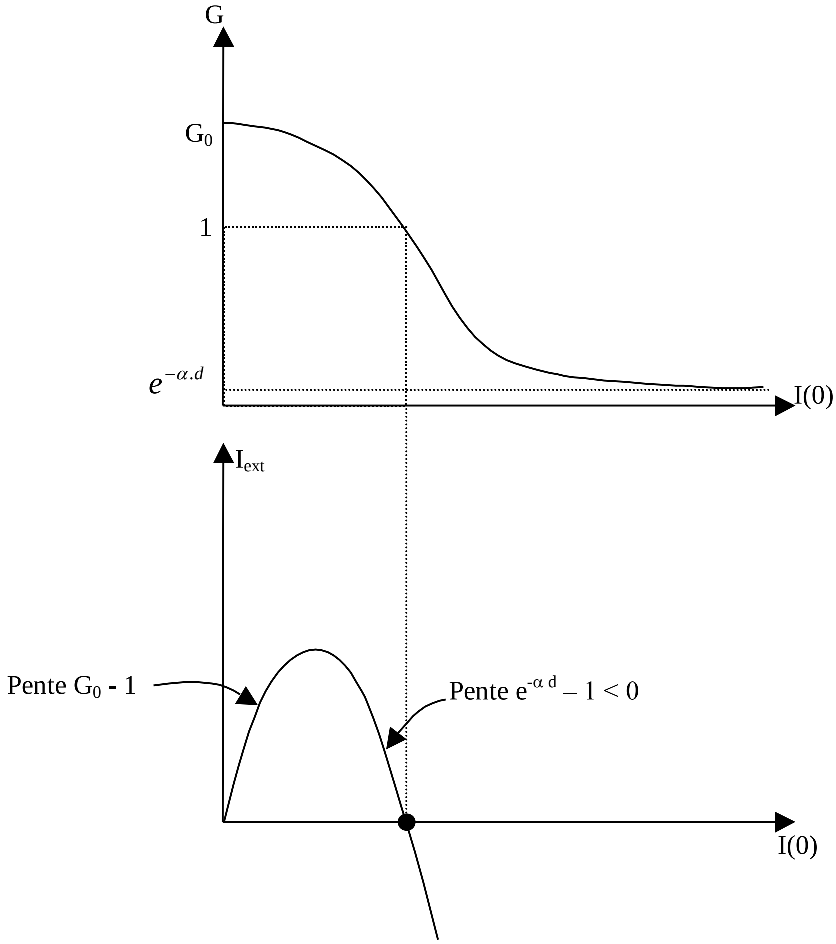
L'intensité extraite I_{ext} est définie comme suit :

$$\boxed{I_{ext} = I(d) - I(0) = I(0).(G-1)}$$

Ainsi, dans le cas où $I(0) >> I_s$

$$I_{ext} = I(0).\left(e^{-\alpha.d} - 1\right) + \frac{g_0.I_s}{\alpha}.\left(1 - e^{-\alpha.d}\right)$$

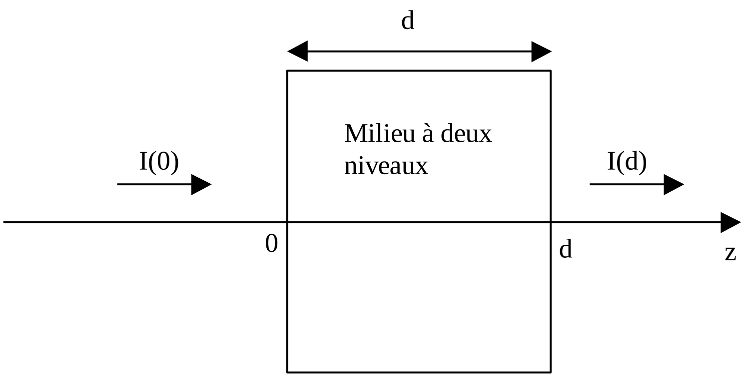
La courbe d'intensité extraite en fonction de $I(0)$ est la suivante



Nous aimerions pomper peu (intensité extraite important) tout en ayant un grand gain. Les courbes montrent que ceci n'est pas possible ; il faut faire un compromis. En pratique, ce compromis est fait en utilisant un milieu amplificateur à fibre ou à semi-conducteurs.

7 – Application : l'absorbant saturable

Le problème étudié ici est le suivant :



Nous cherchons à calculer le gain effectif $G = \dfrac{I(d)}{I(0)}$.

Ici, le milieu étant absorbant, le gain effectif G est en fait le facteur de transmission noté T (les photons qui sortent sont ceux qui n'ont pas été absorbés, soit $I(d) = T.I(0)$).

Nous avons vu précédemment pour un milieu à deux niveaux que

$$\Delta n = -\frac{A.n_t}{2.\sigma.I + A} = \frac{\Delta n_0}{1+\frac{I}{I_s}}$$

Nous ferons dorénavant les hypothèses suivantes :

- Les pertes réparties sont nulles ($\alpha = 0$)
- L'émission spontanée est négligeable

Sous ces conditions, la variation d'intensité dans le milieu amplificateur s'écrit

$$\frac{dI}{dz} = \sigma.\Delta n.I = -\sigma.\frac{\Delta n_0}{1+\frac{I}{I_s}}.I$$

Nous allons maintenant nous intéresser à deux cas particuliers :

- Si $I(0) << I_s$

  Δn_0 est négatif, de même que dI/dz . Ainsi $I(z) \leq I(0) << I_s$

  $$\frac{dI}{dz} = \sigma.\Delta n_0.I$$

  Nous en déduisons la valeur du facteur de transmission

  $$\boxed{T = \exp(\sigma.\Delta n.d) = \exp(-\sigma.n_t.d)}$$

- Si $I(0) >> I_s$ et $I(z) >> I_s$

  La variation d'intensité dans le milieu amplificateur s'écrit

  $$\frac{dI}{dz} = \frac{\sigma.\Delta n_0}{I/I_s}.I = \sigma.\Delta n_0.I_s$$

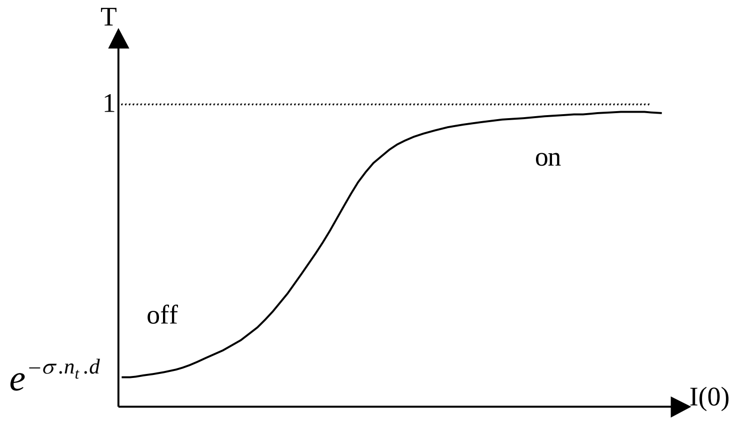
  La solution de cette équation écrite à la côte d nous donne

  $$I(d) = I(0) + \sigma.\Delta n_0.I_s.d = I(0) - \sigma.n_t.I_s.d$$

  Nous en déduisons l'expression du facteur de transmission

  $$\boxed{T = 1 - \frac{\sigma.n_t.I_s.d}{I(0)}}$$

Nous pouvons maintenant tracer la valeur du facteur de transmission T en fonction de $I(0)$



Ceci est en réalité un interrupteur optique commandé en intensité par $I(0)$

II – Influence de la nature de l'élargissement sur l'amplification

1 – Gain linéique 'petit signal' à ν_0 ($g_0(\nu_0)$)

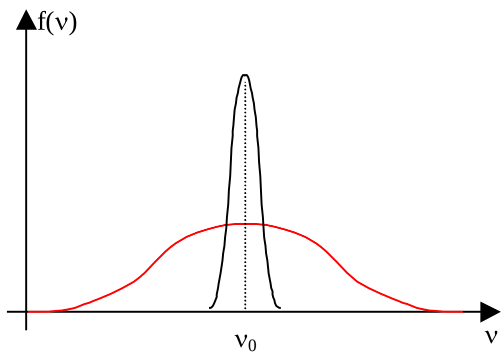
Par définition

$$g_0(\nu_0) = \sigma(\nu_0).\Delta n_0 = \frac{B.n.h.\nu_0}{c}.f(\nu_0).\Delta n_0$$

La forme de raie a une influence sur le gain du milieu amplificateur. En effet, quelque soit la forme de raie,

$$\int f(\nu).d\nu = 1$$

Ainsi, pour une raie 'large', le gain sera plus faible que pour une raie 'étroite' pour que la condition précédente reste validée.



Exemple :

- *Pour un gaz à la température T = 0 K*

$$f(\nu) = \frac{\Gamma}{\pi.\left(\Gamma^2 + (\nu - \nu_0)^2\right)}$$

Soit à la fréquence ν_0

$$f_{\text{hom}\,ogène}(\nu_0) = \frac{1}{\pi.\Gamma}$$

- *Pour un gaz à température T ambiante*

Par effet Doppler

$$f_{in\,\text{hom}\,ogène}(\nu_0) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\frac{c}{\sigma_D.\nu_0}$$

Etant donné que $\frac{\nu_0.\sigma_D}{c} >> \Gamma$

$$f_{in\,\text{hom}\,ogène}(\nu_0) << f_{\text{hom}\,ogène}(\nu_0)$$

Le gain est plus faible dans les milieux inhomogènes

Exemple :

- *Un milieu homogène, le Nd : YAG*

$\sigma(\lambda_0) = 4.10^{-19}.\mathrm{cm}^2$ $\Delta\nu = 1206\ \mathrm{Hz}$ $\lambda_0 = 1064\ \mathrm{nm}$

- *Un milieu inhomogène, le Nd : verre*

$\sigma(\lambda_0) = 3.10^{-20}.\mathrm{cm}^2$ $\Delta\nu = 3\,\mathrm{THz}$ $\lambda_0 \approx 1050\ \mathrm{nm}$

2 – Gain linéique à ν_0 ($g(\nu_0)$)

Cas de l'élargissement homogène :

Nous notons I l'intensité du faisceau à la fréquence ν_0, et $I_s(\nu_0)$ l'intensité de saturation à ν_0. Comme nous l'avons vu plus tôt

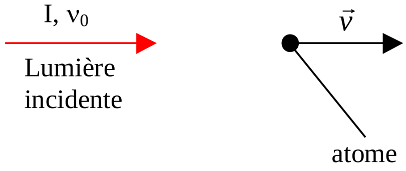
$$\Delta n = \frac{\Delta n_0}{1 + \frac{I}{I_s(\nu_0)}}$$

Soit

$$\boxed{g(\nu_0) = \sigma(\nu_0).\Delta n = \frac{\sigma(\nu_0).\Delta n}{1+\dfrac{I}{I_s(\nu_0)}}}$$

<u>Cas de l'élargissement inhomogène :</u>

Nous allons prendre le cas d'un gaz à température ambiante. Le problème est le suivant



Nous notons ν_{at} la fréquence du faisceau dans le référentiel de l'atome. Nous avons vu que par effet Doppler, nous avons la relation suivante :

$$\nu_0 = \nu_{at}\left(1-\frac{\mathrm{v}}{c}\right)$$

Dans le cas où $\frac{v}{c} << 1$, cette relation devient :

$$\nu_{at} = \frac{\nu_0}{1-\frac{v}{c}} \approx \nu_0.\left(1+\frac{\mathrm{v}}{c}\right)$$

Nous notons $d\Delta n$ l'inversion de population pour les atomes de vitesse comprise entre v et v + dv, et dg le gain apporté par ces atomes.

$$dg = \sigma(\nu_{at}).d\Delta n$$

avec $d\Delta n = \dfrac{\Delta n_0 .p(\mathrm{v})}{1+\dfrac{I}{I_s(\nu_0)}}.d\mathrm{v}$

Nous intégrons maintenant la relation précédente sur l'ensemble des vitesses des différents atomes.

$$g(\nu_0) = \int_{\mathrm{v}} \sigma(\nu_{at}).\frac{\Delta n_0 .p(\mathrm{v})}{1+\dfrac{I}{I_s(\nu_0)}}.d\mathrm{v}$$

Soit

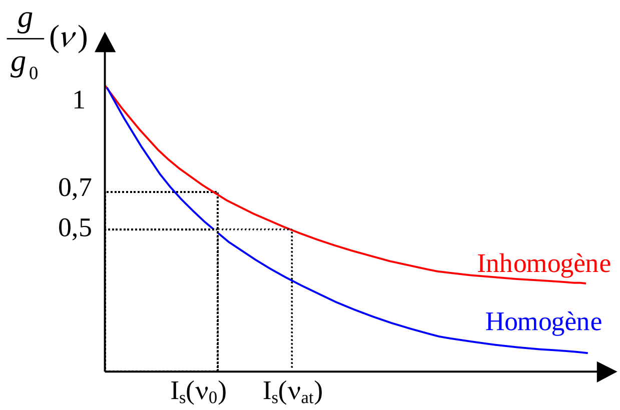
$$\boxed{g(\nu_0) = \frac{g_0(\nu_0)}{\sqrt{1+\dfrac{I}{I_s(\nu_0)}}}}$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned} &g_0(\nu_0) = \sigma(\nu_0).\Delta n_0 \\ &\sigma(\nu_0) = \frac{B.n.h.\nu_0}{c}.f_{\text{inhomogène}}(\nu_0) \\ &f_{\text{inhomogène}}(\nu_0) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\frac{c}{\sigma_D.\nu_0} \end{aligned}}$$

<u>Comparaison de la saturation dans le cas homogène et inhomogène :</u>

Le graphe représentant la saturation dans les cas homogène et inhomogène est le suivant :



Nous remarquons que la saturation est plus faible dans le cas inhomogène. Si la vitesse de l'atome v est non nulle, $f(\nu_{at}) < f(\nu_0)$ car $\nu_{at} \neq \nu_0$. (rappel : ν_0 est pris au maximum de $f(\nu)$)

Pour ν_{at} proche de ν_0, $\sigma(\nu_{at}) < \sigma(\nu_0)$

Si $\nu_{at} \approx \nu_0$: $\sigma(\nu_{at}) \approx \dfrac{B.n.\nu_0}{c}.f(\nu_{at})$

Ainsi, $\sigma(\nu_{at}) < \sigma(\nu_0)$ si $f(\nu_{at}) < f(\nu_0)$

Nous pourrions montrer que I_s est proportionnelle à $1/\sigma$. Par exemple, dans un système à quatre niveaux, $I_s = \dfrac{\sigma_p.I_p + A}{\sigma}$. Ainsi, $I_s(\nu_{at}) > I_s(\nu_0)$, ce qui explique le décalage des courbes.

$$\forall v \neq 0, g = \int \sigma(\nu_{at}).\frac{\Delta n_0.p(0).dv}{1+\dfrac{I}{I_s(\nu_{at})}}$$

3 – Gain linéique petit signal à fréquence quelconque (g(ν))

Nous notons comme précédemment $g_0(\nu)$ le gain petit signal autour de ν_0.

<u>Cas homogène :</u>

Le gain petit signal s'écrit

$$\boxed{g_0(\nu) = \sigma(\nu).\Delta n_0 = \frac{B.n.h.\nu}{c}.f_{\text{homogène}}(\nu).\Delta n_0}$$

Exemple : Ti^{3+} Al_2 O_3 Saphir dopé au titane (cas assez rare)

C'est un milieu à spectre large, donc $g_0(\nu_0) \neq f(\nu)$

Le maximum de gain est décalé vers l'infrarouge

<u>Cas inhomogène :</u>

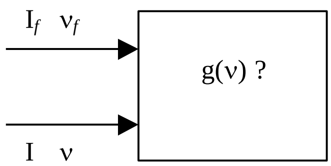
Le gain petit signal s'écrit

$$\boxed{g_0(\nu) = \frac{B.n.h.\nu}{c}.f_{\text{inhomogène}}(\nu).\Delta n_0}$$

$\nu.f(\nu) \rightarrow g_0(\nu)$ et $f(\nu)$ peuvent avoir des formes différentes

4 – Allure du gain linéique *g*(*ν*) saturé par un faisceau de fréquence ν_f

Le problème étudié ici est le suivant :



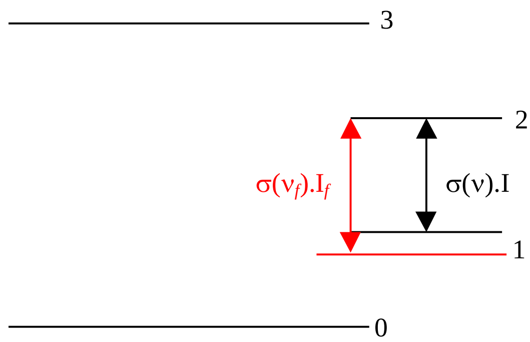
hypothèses :

- ν et ν_f proches de ν_0
- $I << I_s(\nu)$

Nous allons nous intéresser au cas homogène, puis inhomogène.

<u>Cas homogène :</u>

Nous allons prendre le cas d'un milieu à quatre niveaux



Le calcul de l'inversion de population nous donne

$$\Delta n = \frac{\Delta n_0}{1 + \dfrac{I}{I_s(\nu)} + \dfrac{I_f}{I_s(\nu_f)}}$$

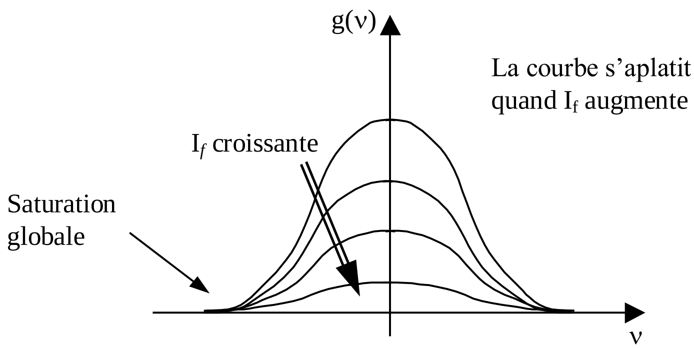
Les calculs seront semblables à ceux menés jusqu'à maintenant en remplaçant $\sigma.I$ par $\sigma.I + \sigma(\nu_f).I_f$.
Les hypothèses de départs permettent de simplifier l'expression de l'inversion de population :

$$\Delta n = \frac{\Delta n_0}{1 + \dfrac{I_f}{I_s(\nu_f)}}$$

Nous pouvons donc déterminer l'expression du gain linéique :

$$\boxed{g(\nu) = \sigma(\nu).\Delta n = \sigma(\nu).\frac{\Delta n_0}{1 + \dfrac{I_f}{I_s(\nu_f)}}}$$

L'allure du gain linéique est le suivant :



Cas inhomogène :

Cas d'un gaz par exemple.

Les différentes fréquences optiques dans le référentiel du laboratoire et de l'atome sont différentes.
Elles sont reliées entre elles par les relations suivantes :

Laboratoire	Atome
ν	$\nu_{at} = \nu.\left(1+\frac{\mathrm{v}}{c}\right)$
ν_f	$\nu_{f,at} = \nu.\left(1+\frac{\mathrm{v}_f}{c}\right)$

Nous notons $d\Delta n$ l'inversion de population pour les atomes de vitesse comprise entre v et v + dv. L'expression du gain linéique pour de tels atomes est la suivante :

$$dg = \sigma(\nu_{at}).d\Delta n$$

Soit sur l'ensemble des atomes :

$$g(\nu) = \int dg = \int_{\mathrm{v}} \sigma(\nu_{at}).\frac{d\Delta n}{d\mathrm{v}}.d\mathrm{v} = \int_{\mathrm{v}} \sigma\left(\nu\left(1+\frac{\mathrm{v}}{c}\right)\right).\frac{d\Delta n}{d\mathrm{v}}.d\mathrm{v}$$

Nous allons maintenant calculer ${d\Delta n}/{d\mathrm{v}}$. Par définition

$$\frac{d\Delta n}{d\mathrm{v}} = \frac{\Delta n_0}{1+\dfrac{I_f}{I_s(\nu_{f,at})}+\cancel{\dfrac{I}{I_s(\nu_{f,at})}}}.p(\mathrm{v})$$

Négligeable par hypothèse

<u>Calcul de Δn / dt :</u>

$$I_s(\nu_{fat}) = I_s\left(\nu_f\left(1-\frac{\mathrm{v}}{c}\right)\right)$$

Nous posons

$$I_s(\nu_{fat}) = \frac{1}{K.B.n.h.\nu_{fat}.f(\nu_{fat})}$$

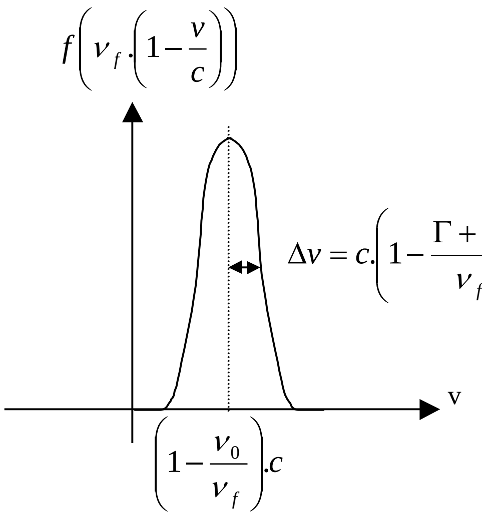
où K est une constante qui dépend de la nature du milieu.

Nous faisons l'hypothèse suivante :

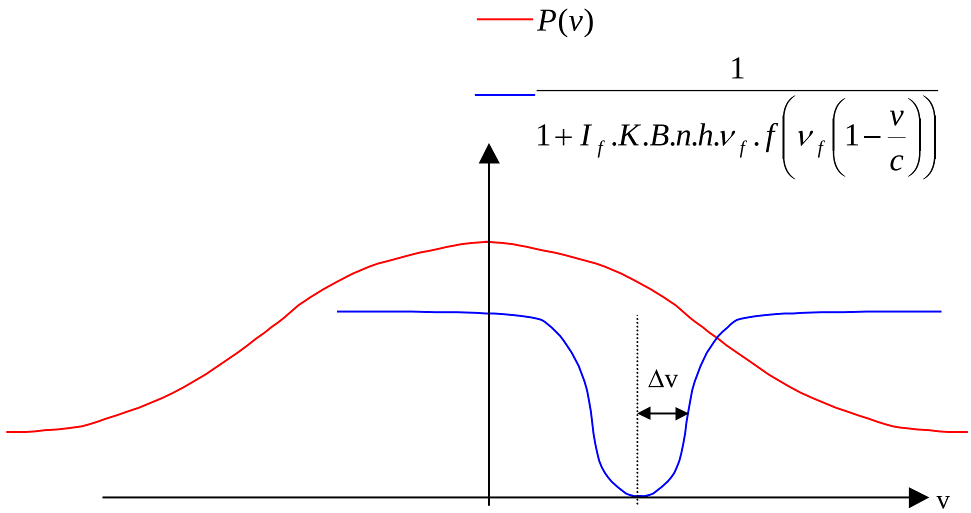
$$\nu_f.\left(1+\frac{\mathrm{v}}{c}\right) = \nu_{fat} \approx \nu_f \qquad \text{car } \frac{\mathrm{v}}{c} << 1$$

Ainsi

$$\frac{d\Delta n}{d\text{v}} = \frac{\Delta n_0 . P(\text{v})}{1 + I_f . K.B.n.h.\nu_f . f\left(\nu_f . \left(1 - \frac{\text{v}}{c}\right)\right)}$$



<u>Allure de $d\Delta n$ / dv en fonction de v</u>



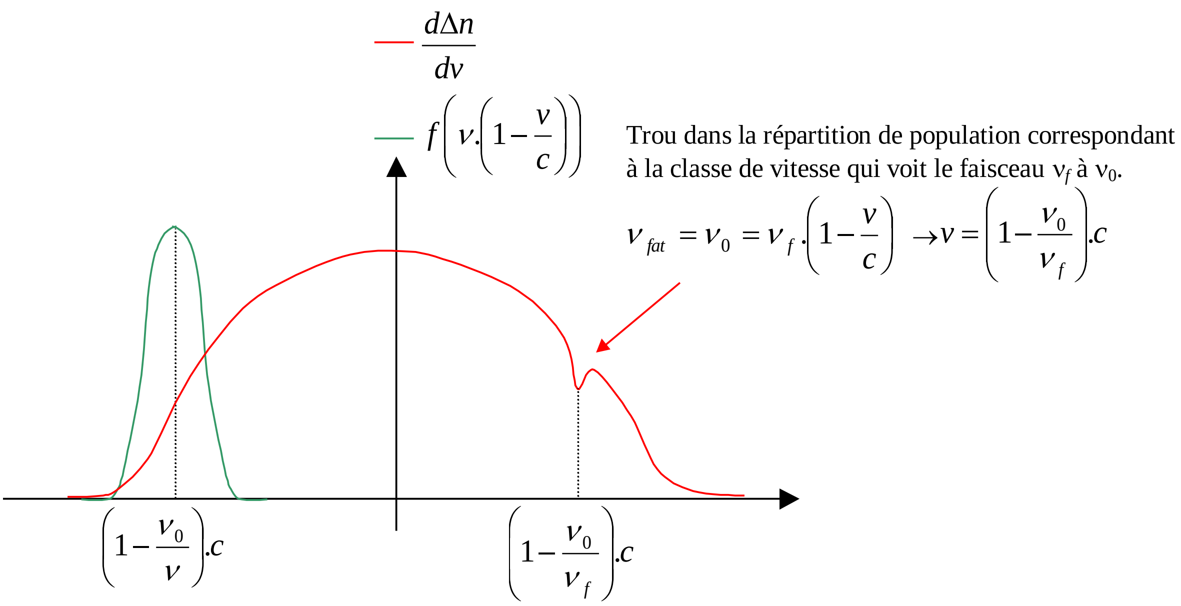
Remarque : P(v) est une gaussienne très large par rapport à $f\left(\nu_f . (1 - \text{v}/c)\right)$

<u>Cas 1 :</u> $\Gamma << \frac{\nu_0 . \sigma_D}{c}$

Si ν_f et ν_0 sont proches,

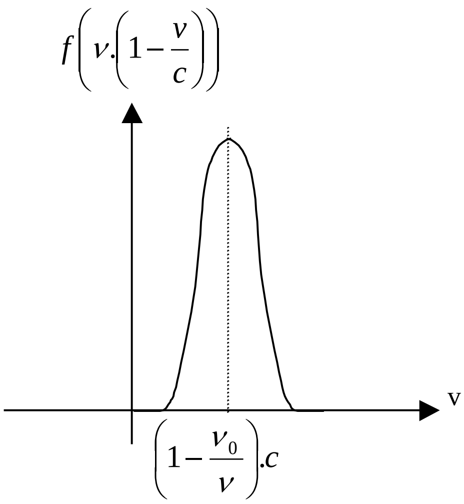
$$\Delta\nu = c.\left(1 - \frac{\Gamma + \nu_0}{\nu_f}\right) \approx c.\frac{\Gamma}{\nu_0}$$

L'hypothèse du cas 1 impose $\Delta\nu << \sigma_D$



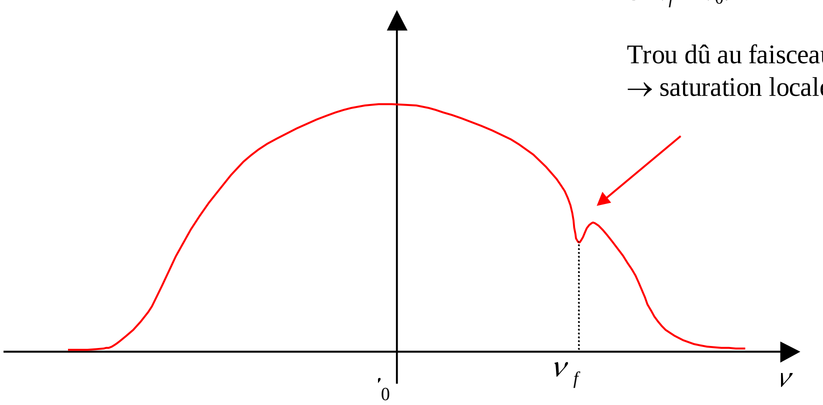
<u>Allure de $\sigma(\nu_{at})$:</u>

$$\sigma(\nu_{at}) = \frac{B.n.h.\nu_{at}}{c}.f(\nu_{at}) \approx \frac{B.n.h.\nu}{c}.f\left(\nu.\left(1-\frac{\text{v}}{c}\right)\right)$$



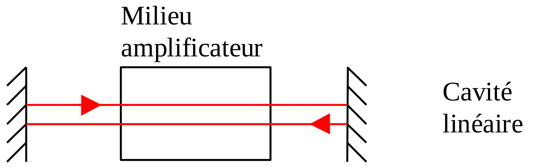
<u>But :</u> $\overline{g}(\nu) = Cte.\int f\left(\nu.\left(1-\frac{v}{c}\right)\right).\frac{d\Delta n}{dv}.dv$

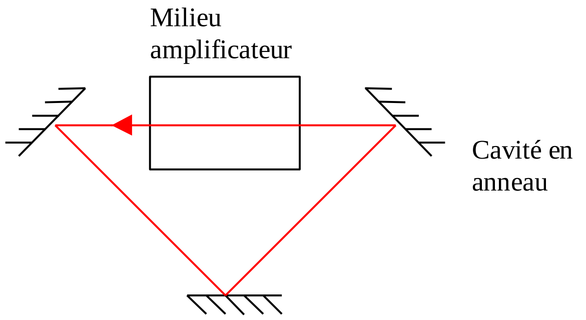
But : allure de $\bar{g}(\nu)$ → ν variable :



CHAPITRE III – L'OSCILLATEUR LASER

Il existe principalement deux types d'oscillateur lasers. Ce qui les différencie est la forme de la cavité résonnante du laser.

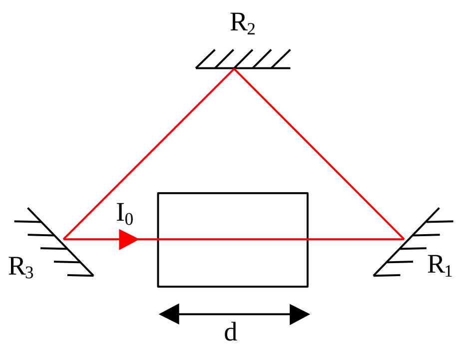




I – Condition d'oscillation

1 – Condition sur le gain

Le problème étudié est le suivant :



Nous notons R_i le coefficient de réflexion du miroir i.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- Δn_0 est le même en tous points du milieu amplificateur

- Δn_0 ne dépend pas du temps
- à la date initiale t = 0, $I_0 << I_s$
- Nous ne nous intéressons qu'à un seul sens de propagation

Nous appelons I_k l'intensité après k tours, et G_k le gain effectif vu par le faisceau d'intensité I_k. G_0 est le gain effectif petit signal.

Après un tour, l'intensité du faisceau devient

$$I_1 = R_1.R_2.R_3.G_0.I_0$$

Après k tours

$$\boxed{I_k = R_1.R_2.R_3.G_{k-1}.I_{k-1}}$$

Remarque : $G_k \leq G_0$

Nous allons maintenant étudier différents cas :

<u>1er cas : $G_0.R_1.R_2.R_3 < 1$</u>

A chaque tour, l'intensité diminue

$$I_k < ... < I_1 < I_0$$

Comme l'intensité diminue et qu'initialement nous sommes en « petit signaux », le gain effectif reste constant et égal au gain « petit signal ».

$$\forall k, G_k = G_0$$

Après k tours, l'intensité du faisceau vaut

$$I_k = (R_1.R_2.R_3.G_0)^k.I_0$$

Pour connaître les variations en fonction du temps de l'intensité du faisceau, il suffit de regarder l'intensité à chaque tour.

Nous appelons L_{opt} la longueur optique de la cavité.

La durée d'un tour est

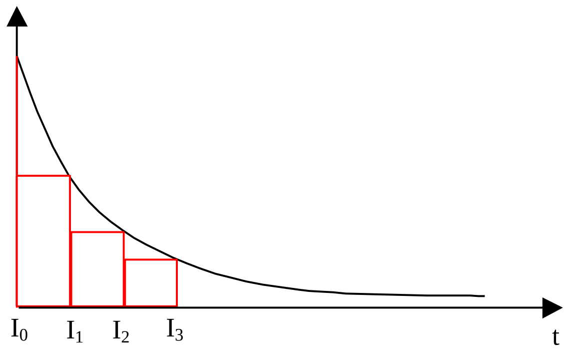
$$t = k.\frac{L_{opt}}{c}$$

Ainsi, l'intensité du faisceau peut s'écrire

$$I_k = I\left(t = k.\frac{L_{opt}}{c}\right) = (R_1.R_2.R_3.G_0)^{\frac{c.t}{L_{opt}}}.I_0$$

$$I(t) = I_0.\exp\left(\frac{c.t}{L_{opt}}.\ln\left(R_1.R_2.R_3.G_0\right)\right)$$

La quantité $\ln\left(R_1.R_2.R_3.G_0\right)$ est négative ; il n'y a pas d'oscillations



En posant

$$\boxed{\tau = -\frac{L_{opt}}{c.\ln\left(R_1.R_2.R_3.G_0\right)}}$$

L'intensité en fonction du temps peut s'écrire

$$\boxed{I(t) = I_0.\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Nous noterons τ_c **la durée de vie du photon du photon en l'absence de pompage** ($\Delta n_0 = 0$).

Nous avons vu dans le chapitre précédent que

$$G_0 = \exp\left(\left(\sigma.\Delta n_0 - \alpha\right).d\right)$$

Si $\Delta n_0 = 0$,

$$G_0 = e^{-\alpha.d}$$

Alors, τ_c est définit par

$$\boxed{\tau_c = \frac{1}{c}.\frac{L_{opt}}{-\ln\left(R_1.R_2.R_3\right) + \alpha.d}}$$

<u>$2^{ème}$ cas : $G_0.R_1.R_2.R_3 = 1$</u>

L'intensité du faisceau reste constante

$$I_1 = I_0 = I_k$$

Nous sommes dans ce cas au seuil d'oscillation

3ème cas : $G_0.R_1.R_2.R_3 > 1$

L'intensité augmente progressivement

$$I_k \geq I_1 > I_0$$

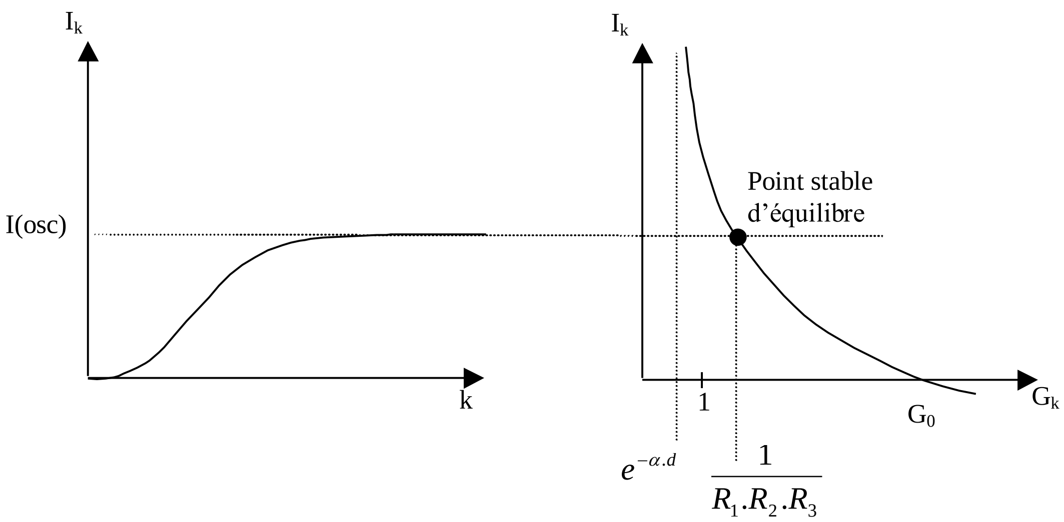
Dans le cas où $I_k << I_s$, le gain reste constant

$$G_k = G_0$$

L'intensité du faisceau varie chaque tour de la manière suivante :

$$\boxed{I_k = \left(G_0.R_1.R_2.R_3\right)^k.I_0}$$

L'intensité varie de manière exponentielle tant que I_k est faible comparé à I_s, puis atteint une valeur seuil



Stabilité du point de fonctionnement :

- Si $I_k > I(osc)$,

$$G_k < \frac{1}{R_1.R_2.R_3}$$

Ainsi,

$$I_{k+1} = G_k.R_1.R_2.R_3.I_k < I_k$$

- Si $I_k > I(osc)$,

$$G_k > \frac{1}{R_1.R_2.R_3}$$

Ainsi,

$$I_{k+1} = G_k.R_1.R_2.R_3.I_k > I_k$$

Si l'intensité varie autour du point d'équilibre, elle a bien tendance à être ramenée vers ce dernier.

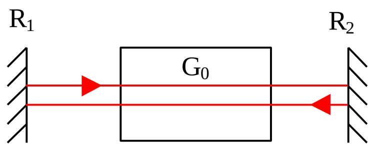
Conclusion :

La condition d'oscillation sur le gain est

$$\boxed{G_0.R_1.R_2.R_3 \geq 1}$$

Remarque : En menant les mêmes calculs avec une cavité de résonance linéaire, nous obtenons la condition d'oscillation sur le gain suivante

$$\boxed{G_0^2.R_1.R_2 \geq 1}$$



2 – Condition d'oscillation sur la fréquence

Nous faisons l'hypothèse suivante : La cavité est faîte de manière à ce que le champ électrique après un tour de cavité soit conservé.

Nous notons l'amplitude du champ électrique après *k* tour dans la cavité E_k, défini par :

$$E_k = E_0.\cos(\omega.t + \varphi)$$

où $I_0 = |E_0|^2$ est l'intensité lumineuse dans la cavité après *k* tour de cavité.

Un tour plus tard, l'amplitude du champ électrique devient :

$$E_{k+1} = E_0.\sqrt{R_1.R_2.R_3.G_k}.\cos\left(\omega.t + \varphi - \frac{2.\pi}{\lambda}.L_{opt}\right)$$

Or par hypothèse, $E_{k+1} = E_k$. Cette hypothèse impose donc

$$\sqrt{R_1.R_2.R_3.G_k} = 1$$
$$\frac{2.\pi}{\lambda}.L_{opt} = 2.k.\pi$$

La simplification de la deuxième relation imposée par les hypothèses nous donne une condition sur la fréquence de l'onde lumineuse intra-cavité :

$$\boxed{\nu = \frac{k.c}{L_{opt}}}$$

Exemple : Pour λ = 633 nm et L_{opt} = 1 m, nous obtenons k = 1,5.10^6

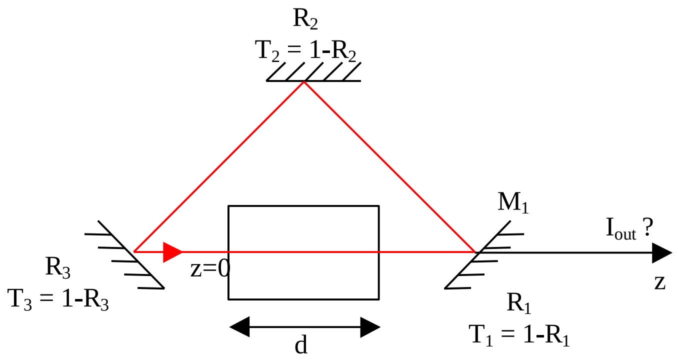
Remarque : Dans une cavité linéaire, la condition sur la fréquence de l'onde lumineuse intra-cavité devient :

$$\boxed{\nu = \frac{k.c}{2.L_{opt}}}$$

II – Intensité en sortie de l'oscillateur

1 – Equation implicite sur le gain effectif

Nous étudions le cas d'une cavité en anneau



Nous faisons les hypothèses suivantes :

$$T_1 > T_2 \text{ et } T_1 > T_3$$

Le miroir M_1 est le miroir de sortie. Le choix de la transmission T_1 du miroir de sortie dépend du milieu amplificateur.

Nous rappelons que

Dans l'amplificateur : $\dfrac{dI}{dz} = \dfrac{\sigma.\Delta n_0}{1+\dfrac{I(z)}{I_s}}.I(z) - \alpha.I(z)$

A l'oscillation : $G.R_1.R_2R_3 = 1$ (ou pour une cavité linéaire $G^2.R_1.R_2 = 1$)

La première équation donne

$$\frac{dI}{I} = \left(\frac{\sigma.\Delta n_0}{1+\dfrac{I}{I_s}} - \alpha\right).dz$$

Soit après intégration

$$\ln\left(\frac{I(d)}{I(0)}\right)=\int_0^d\left(\frac{\sigma.\Delta n_0}{1+\dfrac{I}{I_s}}-\alpha\right).dz$$

Par définition

$$G=\frac{I(d)}{I(0)}$$

Soit

$$\boxed{\frac{1}{R_1.R_2.R_3}=G=\exp\left[\int_0^d\left(\frac{\sigma.\Delta n_0}{1+\dfrac{I}{I_s}}-\alpha\right).dz\right]}$$

Ceci donne une équation implicite sur $I(z)$. Nous cherchons à déterminer l'intensité en sortie de la cavité I_{out}.

2 – Approximation « faibles pertes »

L'approximation que nous allons utiliser par la suite n'est applicable que pour certains lasers (HeNe par exemple)

Approximation faibles pertes :

$$T_1+T_2+T_3<<1$$

<u>Allure de $I(z)$ dans le milieu amplificateur :</u>

Par définition

$$I(d)=G.I(0)$$

La condition d'oscillation impose de plus que

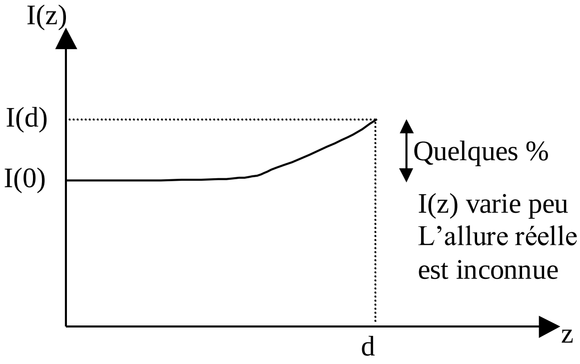
$$G.R_1.R_2.R_3=1$$

Nous obtenons ainsi la relation suivante

$$I(d)=\frac{I(0)}{R_1.R_2.R_3}=\frac{I(0)}{(1-T_1).(1-T_2).(1-T_3)}$$

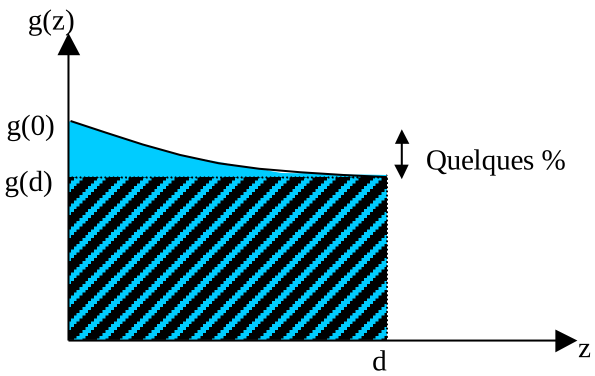
En utilisant les approximations faibles pertes et en négligeant le second ordre

$$\boxed{I(d) = I(0).(1 + T_1 + T_2 + T_3)}$$



Allure de $g(z) = \sigma.\Delta n(z)$:

L'allure de $g(z) = \sigma.\Delta n(z) = \dfrac{\sigma.\Delta n_0}{1 + \dfrac{I}{I_s}}$ est la suivante



Estimation de G :

Le gain du milieu amplificateur est donné par la relation

$$\boxed{G = \exp\left(\int_0^d g(z).e^{-\alpha.d}.dz\right) = e^{\int_0^d g(z).dz}.e^{-\alpha.d}}$$

la valeur de l'intégrale $\int g(z).dz$ est donnée par l'aire représentée en bleu sur la courbe ci-dessus. Compte tenu de la faible variation de g(z), nous approximerons la valeur de cette intégrale par l'air hachurée.

$$\boxed{\int_0^d g(z).dz \approx g(d).d = \dfrac{\sigma.\Delta n_0.d}{1 + \dfrac{I(d)}{I_s}}}$$

3 – Intensité en sortie I_{out}

Les calculs menés plus tôt permettent d'écrire en sortie du milieu amplificateur la relation suivante :

$$e^{g(d)}.e^{-\alpha.d} = \frac{1}{R_1.R_2.R_3}$$

Soit, en prenant le logarithme de la relation précédente

$$g(d).d - \alpha.d = \ln\left(\frac{1}{R_1.R_2.R_3}\right)$$
$$g(d).d = \alpha d - \ln(R_1.R_2.R_3)$$

En utilisant l'approximation « faible perte » évoquée plus tôt, nous obtenons après développement limité

$$\boxed{g(d).d = \alpha.d + T_1 + T_2 + T_3}$$

Définitions : Nous notons *P* les pertes totales de la cavité. Par définition

$$P = \alpha.d + T_1 + T_2 + T_3$$

Soit $P = g(d).d$, ou encore

$$P = \frac{\sigma.\Delta n_0.d}{1 + \dfrac{I(d)}{I_s}}$$

Nous pouvons ainsi déterminer l'intensité en sortie du milieu amplificateur

$$I(d) = I_s.\left(\frac{\sigma.\Delta n_0.d}{P} - 1\right)$$

Soit

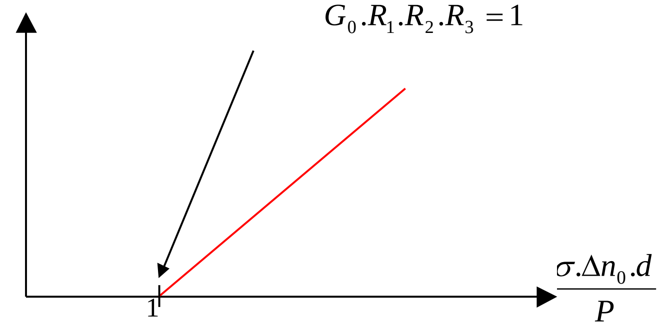
$$\boxed{I_{out} = T_1.I_s.\left(\frac{\sigma.\Delta n_0.d}{P} - 1\right)}$$

Seuil d'oscillation :

$$\sigma.\Delta n_0.d = P$$

Nous retrouvons la condition d'oscillation

$$G_0.R_1.R_2.R_3 = 1$$



Définition : Nous définissons les pertes passives *P'* de la manière suivante : $$P' = \alpha.d + T_2 + T_3$$

Nous pouvons exprimer l'intensité en sortie de la cavité en fonction des pertes passives

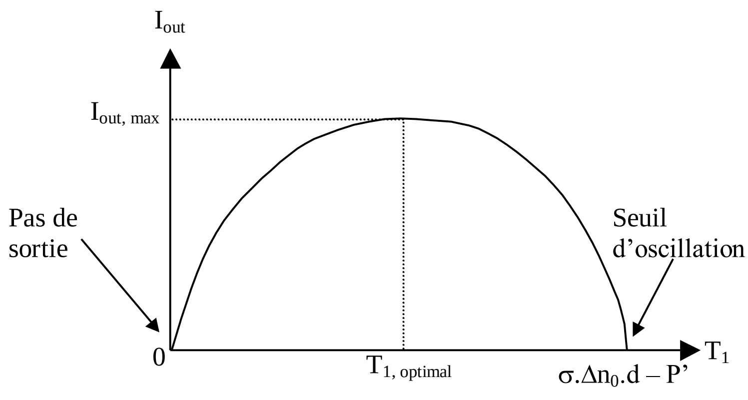
$$I_{out} = f(T_1) = T_1.I_s.\left(\frac{\sigma.\Delta n_0.d}{T_1 + P'} - 1\right)$$

Nous allons nous intéresser à deux points particuliers de $f(T_1)$.

Si $T_1 = 0$, $I_{out} = 0$

Si $T_1 = \sigma.\Delta n_0.d - P'$, $I_{out} = 0$

Nous pouvons tracer la fonction I_{out} en fonction de la transmission T_1 du miroir de sortie



Ainsi, nous voyons qu'il existe une transmission du miroir de sortie optimum qui rend maximum l'intensité émise par le laser. Cette transmission est caractérisée par

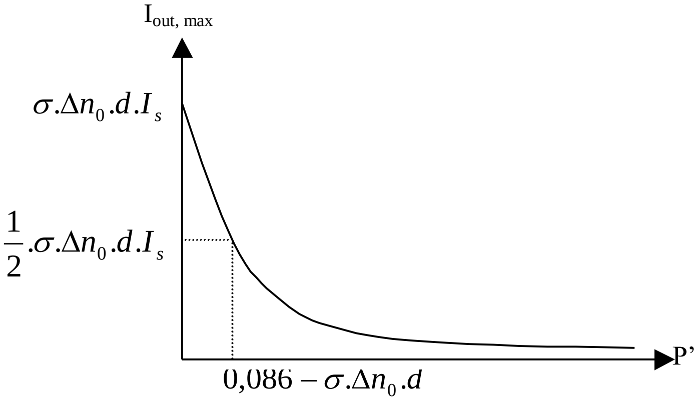
$$\frac{dI_{out}}{dT_1} = 0$$

Nous obtenons ainsi

$$\boxed{\begin{aligned} T_{1,\text{ optimal}} &= \sqrt{\sigma.\Delta n_0.P'.d} - P' \\ I_{\text{out, max}} &= I_s.\sigma.\Delta n_0.d.\left(1 - \sqrt{\frac{P'}{\sigma.\Delta n_0.d}}\right)^2 \end{aligned}}$$

Rôle clef des pertes passives :

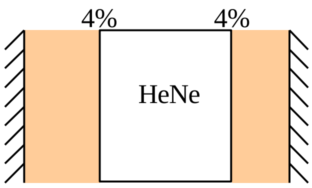
La valeur de la transmission du miroir de sortie est fixée à sa valeur optimale.



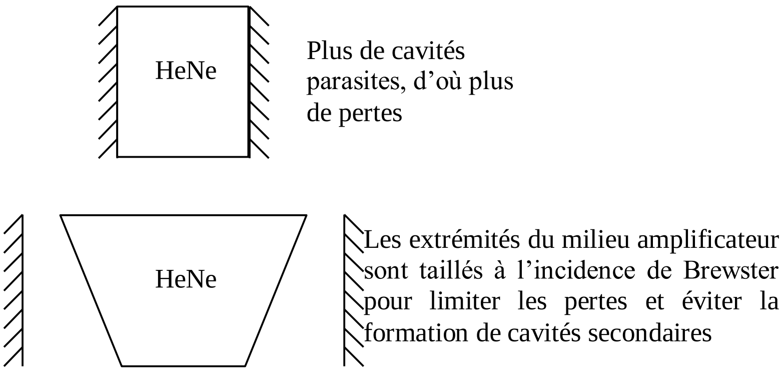
Nous voudrions comparer le gain et les pertes

$$\sigma.\Delta n_0.d = \ln G_0$$

Nous voyons sur le graphique que les pertes passives ont une influence énorme sur le fonctionnement du laser. L'idéal serait de les minimiser pour augmenter l'intensité émise par le laser. Un des problèmes que nous pouvons rencontrer lors de la construction de la cavité laser est la formation de cavité secondaire.



Ici, les pertes de 4% ajoutée par les cavités parasites (coloré sur le schéma) ne permettent pas au laser de fonctionner. Deux solutions simples existent à ce problème



Dans les deuxième cas, tailler à l'incidence de Brewster est essentiel. En effet, seul la polarisation TM sera réfléchie. Ainsi, l'onde étant polarisée intracavité, si la polarisation de l'onde lumineuse dans la cavité est TE, nous minimisons les pertes. Il faut également limiter la poussière sur la surface des miroirs qui induit également des pertes par diffusion

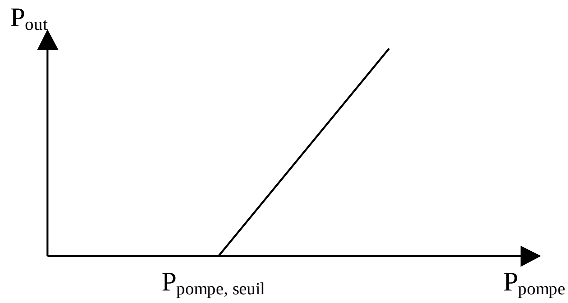
4 – Efficacité

Le but de cette partie est de caractériser la puissance de sortie du laser en fonction de la puissance de pompe. Nous avons établit plus tôt que

$$P_{out} = S.T_1.I(d) = S.T_1.\left(\frac{\sigma.\Delta n_0.d}{P} - 1\right)$$

où Δn_0 est une fonction de la puissance de pompe p_{pompe}. Le lien qui existe entre ces deux grandeurs va dépendre de la nature du milieu amplificateur, selon qu'il soit à 3 ou 4 niveaux. Nous pouvons montrer que

$$\boxed{P_{out} = \eta.\left(P_{pompe} - P_{pompe,seuil}\right)}$$



Dans le cas d'un milieu à trois niveaux :

$$\eta = \frac{\nu}{\nu_{pompe}}.\frac{\sigma_{pompe}}{\sigma}.\frac{T_1}{2}.\left(\frac{\sigma.d.n_t}{P} - 1\right)$$

Dans le cas d'un milieu à quatre niveaux

$$\eta = \frac{\nu}{\nu_{pompe}}.\frac{\sigma_{pompe}}{\sigma}.T_1.\left(\frac{\sigma.d.n_t}{P} - 1\right)$$

Exemple : Laser Nd : YAG

λ = 1064 nm, λ_p = 808 nm, η = 50%

Remarque : Explication du facteur 2 entre les expressions de η pour un milieu à 3 et un 4 niveau

Définition : Nous définissons η_Q l'efficacité quantique du laser, qui est en fait l'efficacité du laser parfait. Pour un laser parfait, un photon de pompe à la fréquence ν_{pompe} permet l'émission d'un photon laser de fréquence ν. Le rapport des énergies fournie (pompe) et émise (laser) nous donne :

$$\eta_Q = \frac{\nu}{\nu_{pompe}}$$

Il existe un défaut quantique au laser dont nous ne pourrons jamais nous affranchir et qui provoque une dissipation d'énergie. Ce défaut est caractérisé par :

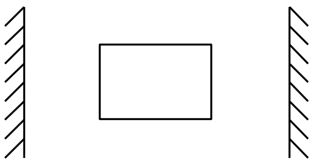
$$\boxed{Défaut = \frac{\nu_{pompe} - \nu}{\nu_{pompe}}}$$

Exemple :

Nd : YAG η_Q = 808 / 1064 = 76% *environ 30% d'énergie perdue sous forme de chaleur*

Yb : YAG λ_{pompe} = 940 nm λ = 1030 nm η_Q = 91%

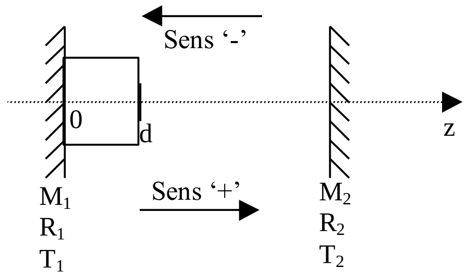
III – Cavité linéaire



Il s'établit dans la cavité linéaire une onde stationnaire. Dans toute cette partie, nous nous placerons dans le cadre des approximations faibles pertes.

1 – Répartition de gain en présence d'une onde stationnaire

Nous étudions le problème suivante :



Nous posons $k = \frac{2.\pi}{\lambda}$.

L'amplitude de l'onde « + » est donnée par la relation

$$A_+(z) = \sqrt{I_+}.e^{-j.k.z}.e^{j.\varphi_+}$$

L'amplitude de l'onde « - » est donnée par la relation

$$A_-(z) = \sqrt{I_-}.e^{-j.k.z}.e^{j.\varphi_-}$$

A l'abscisse z = 0, la réflexion métallique sur le miroir impose un déphasage de π entre les deux ondes. Ainsi, nous pouvons écrire

$$A_+(0) = A_-(0).e^{j.\pi}.\sqrt{R_1}$$
$$\sqrt{I_+}.e^{j.\varphi_+} = \sqrt{I_-}.e^{j.\varphi_-}.e^{j.\pi}.\sqrt{R_1}$$

Nous obtenons la relation suivante sur les phases des deux ondes

$$\varphi_+ = \varphi_- + \pi$$

Ainsi, l'intensité à l'abscisse z s'écrit

$$I(z) = I_+ + I_- + 2.\sqrt{I_+ + I_-}.\cos(-2.k.z + \varphi_+ - \varphi_-)$$

Soit, d'après la relation établie plus haut sur les phases

$$I(z) = I_+ + I_- + 2.\sqrt{I_+ + I_-}.\cos(2.k.z)$$

Dans le cadre des approximations faibles pertes, $I_+ \approx I_-$ (il n'y a pas de perte entre l'aller et le retour). Ainsi, nous obtenons

$$\boxed{I(z) = 2.I_+.(1 - \cos(2.k.z)) = 4.I_+.\sin^2(k.z)}$$

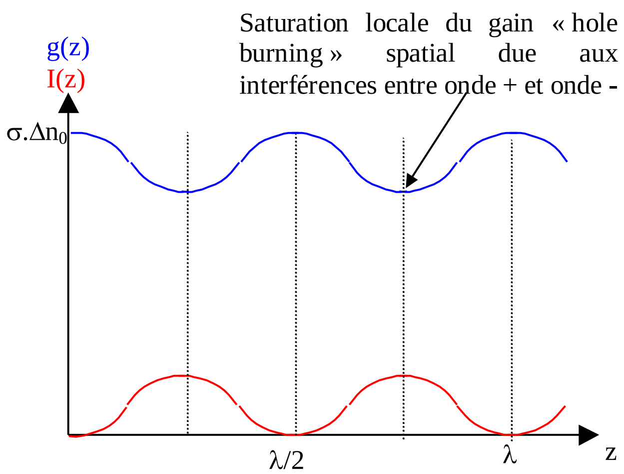
<u>Allure de g(z) :</u>

Par définition

$$g(z) = \frac{\sigma.\Delta n_0}{1 + \frac{I(z)}{I_s}}$$

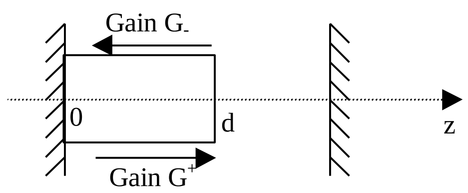
Soit

$$\boxed{g(z) = \frac{\sigma.\Delta n_0}{1 + 4.\frac{I_+}{I_s}.\sin^2\left(\frac{2.\pi}{\lambda}.z\right)}}$$



c.f. annexe : Répartition du gain linéique en présence d'une onde stationnaire

2 – Equation implicite pour I dans le cas des cavités linéaires



A l'oscillation, les conditions d'oscillations qui ont été évoquées impose

$$I_+(d) = G_+.R_2.G_-.R_1.I_+(d)$$

Soit

$$\boxed{G_+.G_-.R_1.R_2 = 1}$$

Remarque : Dans le cadre des approximations « faibles pertes »

$I_+ \approx I_-$ *et* $G_+ \approx G_-$. *Donc*

$$\boxed{G_+^2.R_1.R_2 = 1}$$

<u>Expression de G_+ :</u>

Par définition

$$g(z) = \frac{\sigma.\Delta n_0}{1 + 4.\frac{I_+}{I_s}.\sin^2(k.z)}$$

Soit

$$\frac{dI_+}{dz} = \frac{\sigma.\Delta n_0.I_+}{1 + 4.\frac{I_+}{I_s}.\sin^2(k.z)} - \alpha.I_+$$

Dans le cadre des hypothèses faibles pertes, $I_+(z) \approx Cte = I_+$. Ainsi, nous pouvons déterminer l'expression de G_+ :

$$\boxed{G_+ = \exp\left[\int_0^d \frac{\sigma.\Delta n_0}{1 + 4.\frac{I_+}{I_s}.\sin^2(k.z)}.dz - \alpha.d\right]}$$

De plus, $G_+^2.R_1.R_2 = 1$, ou encore $\ln\left(G_+^2.R_1.R_2\right) = 0$. L'expression précédente nous permet donc d'obtenir la relation suivante :

$$2.\int_0^d \frac{\sigma.\Delta n_0}{1 + 4.\frac{I_+}{I_s}.\sin^2(k.z)}.dz = T_1 + T_2 + 2.\alpha.d$$

<u>Allure du rapport I_+ / I_s en fonction de $g_0.d / \rho$:</u>

ρ est définit comme suit

$$\rho = T_1 + T_2 + 2.\alpha.d$$

Au seuil d'oscillation, I_+ est nulle, soit

$$\rho = 2.\sigma.\Delta n_0.d$$

$$\frac{g_0.d}{\rho} = \frac{1}{2}$$

Dans le cas de la **cavité en anneau**

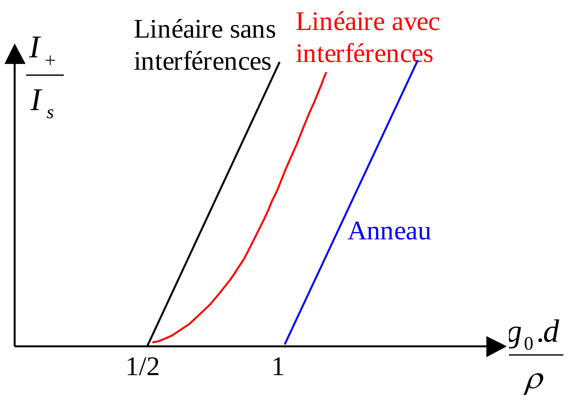
$$\boxed{\frac{I_+}{I_s} = \frac{g_0.d}{\rho} - 1}$$

Dans le cas d'une **cavité linéaire sans interférences**. En tous points $I = 2.I_+$. Ainsi,

$$g(z) = \frac{\sigma.\Delta n_0}{1+2.\dfrac{I_+}{I_s}}$$

Soit,

$$\boxed{\frac{I_+}{I_s} = \left(\frac{g_0.d}{\rho} - \frac{1}{2}\right)}$$



En conclusion, nous remarquons que les oscillations démarrent plus facilement dans une cavité linéaire que dans une cavité en anneau.

IV – Spectre de l'oscillateur laser

1 – Grand principe

Définition : Les modes longitudinaux de la cavité laser ν_k sont définis par

$$\nu_k = k.\frac{c}{L_{opt}} \quad \text{(cavité en anneau)}$$

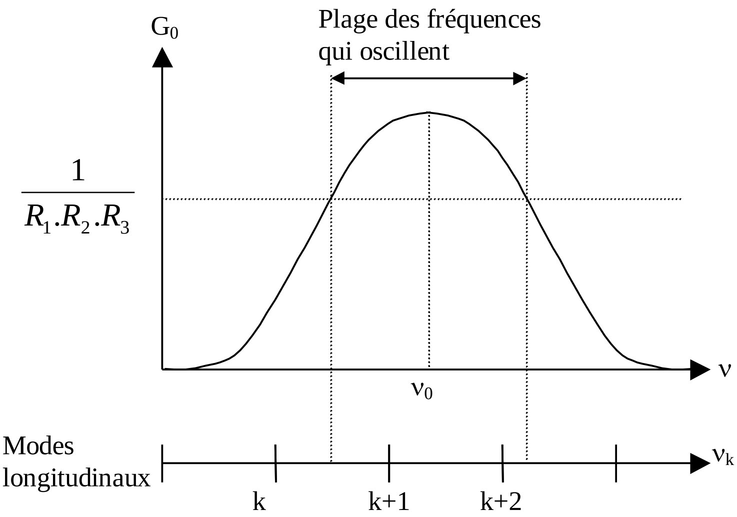
$$\nu_k = k.\frac{c}{2.L_{opt}} \quad \text{(cavité linéaire)}$$

Condition d'oscillation d'un mode longitudinal

Les fréquences pouvant osciller dans la cavité sont caractérisée par

$$G_0(\nu_k).R_1.R_2.R_3 \geq 1$$

Nous prendrons, pour comprendre le principe du fonctionnement, le cas suivant



Ici, deux modes (k+1 et k+2) peuvent osciller. La question est maintenant de savoir si ces modes oscillent réellement.

<u>Elargissement homogène dans une cavité en anneau (1 seul sens de propagation) :</u>

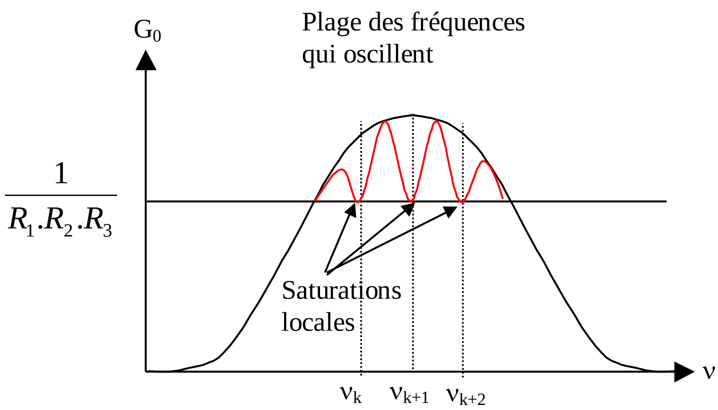
c.f . annexe : Evolution de l'intensité des modes au démarrage du laser.

Au démarrage, le bruit permet par fluorescence de créer un peigne de mode. Après un tour de cavité, ce peigne est multiplié par la courbe de gain. A mesure des tours, « l'enveloppe » des modes restants devient de plus en plus fine, du fait de la multiplication par le gain du milieu amplificateur.

c.f. annexe : Cas de l'élargissement homogène

Au final, dans le cas de l'élargissement homogène dans une cavité en anneau, un seul mode oscille ; c'est celui qui correspond au gain le plus important.

<u>Elargissement inhomogène dans un anneau :</u>



Les trois modes k, k+1 et k+2 peuvent osciller. En réalité, on ne peut réellement savoir quel mode va finalement osciller. Ce qui est sur c'est que se créé une saturation locale de gain aux fréquences qui commencent à osciller, si bien qu'elles finissent par ne plus osciller.

Cavité linéaire :

c.f. annexe : Influence du 'Hole-Burning spatial' sur le spectre de l'oscillateur laser

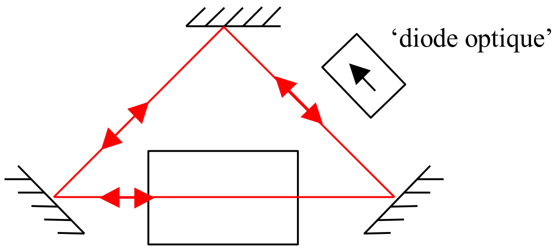
L'onde associé au mode ν_1 est stationnaire, et créer ainsi des inhomogénéités de spatiale d'inversion de population. Ainsi, il existe des lieux où l'inversion de population n'est pas « consommée » par l'onde qui va laser. Ainsi, l'onde associé au mode ν_2 peut également osciller.

Plusieurs modes peuvent fonctionner ; c'est un fonctionnement multimode.

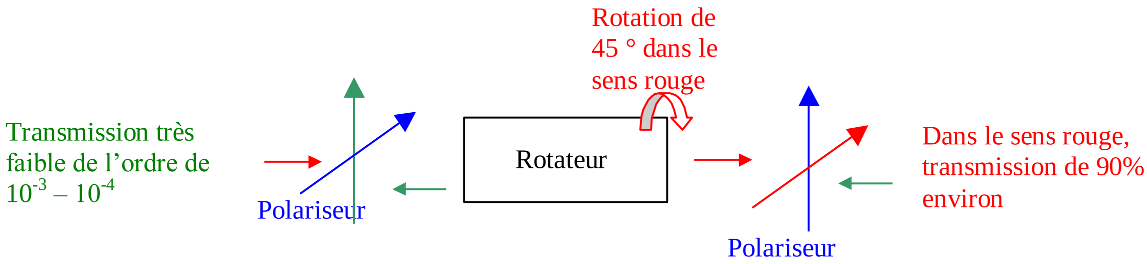
2 – Contrôle du spectre

2.1 – Comment rendre un laser monomode (spectral, longitudinal)

Elargissement homogène dans un atome, un seul sens de propagation

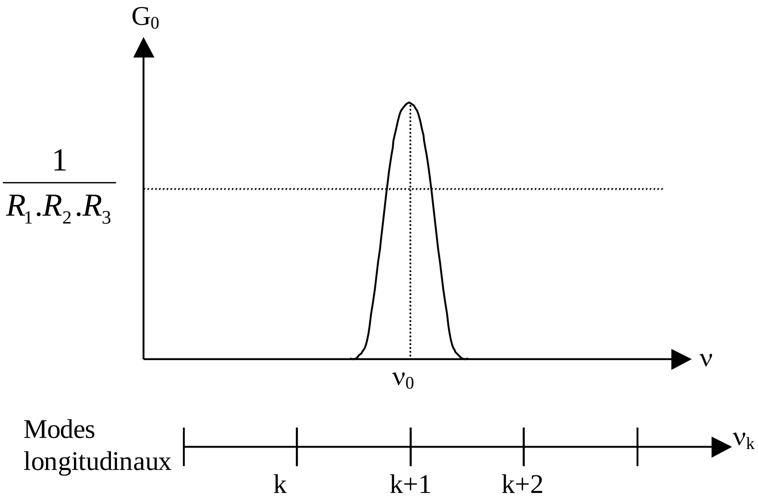


La « diode optique » utilisable ici est un rotateur de faraday utilisé avec deux polariseur (isolateur optique)



Cavité linéaire très courte

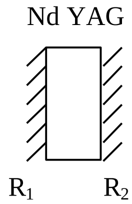
Cette technique consiste à ne permettre qu'un mode d'osciller dans la cavité.



Réduire la taille de la cavité limite le nombre de mode qui peuvent effectivement osciller.

Exemple : Nd : YAG $\Delta\nu$ = 120 GHz *L_{opt} = 0,5 mm pour permettre un seul mode d'osciller*

Un moyen d'obtenir une cavité si petite est d'utiliser la technologie de 'microchip', qui consiste à accoler les miroirs de la cavité directement sur les faces du semi-conducteur.



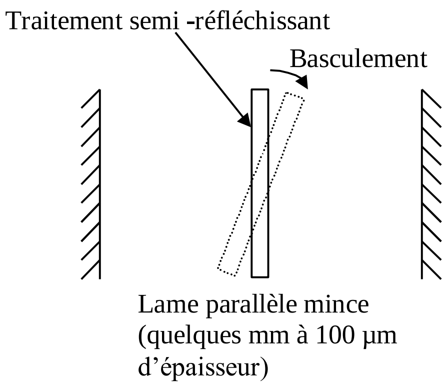
<u>Filtre sélectif spectrale</u>

- Etalon de Fabry Pérot

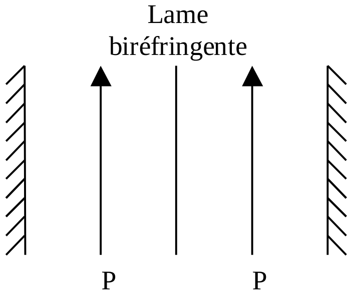
  Le basculement permet d'éviter de créer entre les miroirs et la lame des cavités parasites. Malgré le basculement, le filtre reste un filtre de Fabry Pérot du fait de la faible épaisseur de la lame.

  Le Fabry Pérot permet de rajouter des pertes qui ne permettront qu'à un seul mode d'osciller.

  c.f. annexe : Effet du filtrage spectral par Fabry Pérot



- Filtre de Lyot



Dans ce filtre, seule les longueurs d'onde données par $k.\lambda = \delta = e.(n_e - n_o)$ (k entier) sont transmises sans pertes. Ceci est bien un filtre spectral.

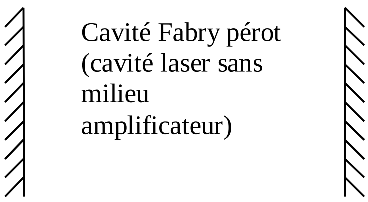
2.2 – Largeur spectrale d'un laser monomode

Il existe une limite fondamentale à la largeur spectrale du laser. En effet, un bruit de phase se traduit pour le laser en un bruit de fréquence. Or l'émission spontanée impose une fluctuation de l'intensité et de la phase de l'onde laser, et donc de la fréquence du laser.

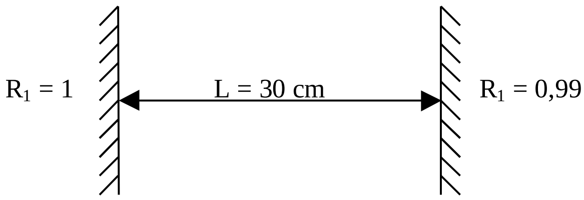
Formule de Schawlow et Townes :

$$\boxed{\Delta\nu = \frac{2.\pi.h.\nu_0}{P_{out}}.(\Delta\nu_c)^2.\frac{N_2}{N_2 - N_1}}$$

où $\Delta\nu_c$ est la largeur spectrale du pic associé au Fabry Pérot de la cavité. N_1 et N_2 sont les densités de populations des deux niveaux énergétiques du laser.



Exemple : Le laser HeNe



P_{out} = 1 mW et λ = 633 nm

C'est un laser à quatre niveaux, donc $N_1 = 0$. Pour la cavité Fabry Pérot,

$$F = \frac{c/2.L}{\Delta\nu_c} = \frac{\pi.\sqrt{R}}{1-R} \quad où \quad R = \sqrt{R_1.R_2}$$

D'où

$$\Delta\nu_c = \frac{c}{2.L}.\frac{1-R}{\pi.\sqrt{R}}$$

Soit une largeur spectrale du faisceau laser

$$\Delta\nu = 1{,}3.10^{-3}\ \text{Hz}$$

Limites technologiques

La longueur optique L_{opt} de la cavité ne peut en réalité être stabilisée. Or les modes du laser dépendent de cette longueur. Nous avons en effet la relation

$$\nu = k.\frac{c}{2.L_{opt}}$$

Soit

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta L_{opt}}{L_{opt}}$$

Exemple : Pour L_{opt} = 30 cm, λ = 633 nm et des variations de la longueur de la cavité ΔL = 1 nm, nous obtenons $\Delta\nu$ = 1,6 MHz !

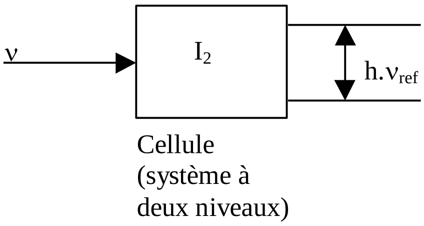
Nous voyons donc que des variations de la longueur de la cavité peuvent avoir des répercussions importantes en changeant la fréquence d'émission du laser.

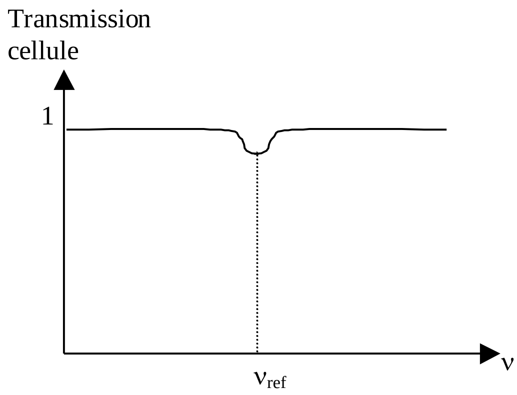
Nous appelons :

- jitter (gigue temporelle) des fluctuation rapide de ΔL (ceci peut se traduire par des vibrations)
- dérives des fluctuations lentes de ΔL

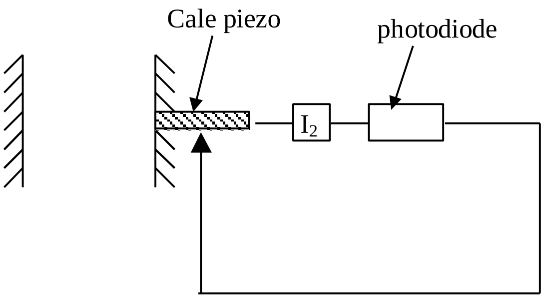
Contrôle de la fréquence par asservissement

L'idée est de comparer la fréquence ν du laser à une fréquence de référence ν_{ref} issue d'une transition atomique. Pour se faire, nous insérons une cellule qui nous permettra de faire cette comparaison :





Nous fabriquons ensuite le montage suivant



Les performances que nous pouvons atteindre avec ce type de montages sont les suivantes :

- Laser HeNe stabilisé sur I_2 $\Delta\nu = 0{,}1$ Hz
- Nd : YAG en anneau $\Delta\nu = 1$ Hz
- Diode laser $\Delta\nu =$ quelques kHz

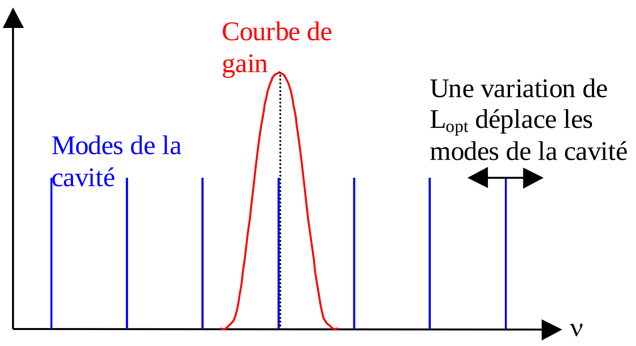
Asservir la position d’un miroir permet d’augmenter grandement la monochromaticité du laser.

2.3 – Comment accorder un laser

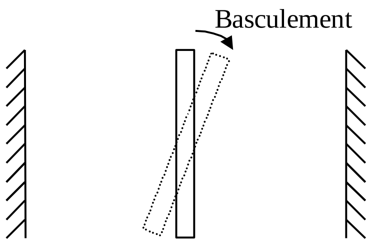
<u>Accord sur une faible bande spectrale (de l’ordre du MHz) :</u>

- Déplacement d’un des miroirs de la cavité

  Cette méthode permet de faire varier la longueur d’onde du laser en changeant la longueur de la cavité. Toutefois, comme nous l’avons vu plus tôt, cette longueur est très difficile à stabiliser.



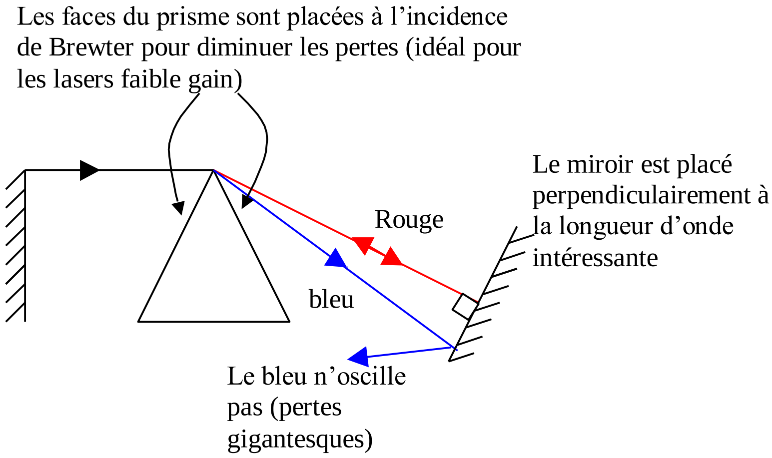
- Rotation d'un étalon Fabry Pérot :



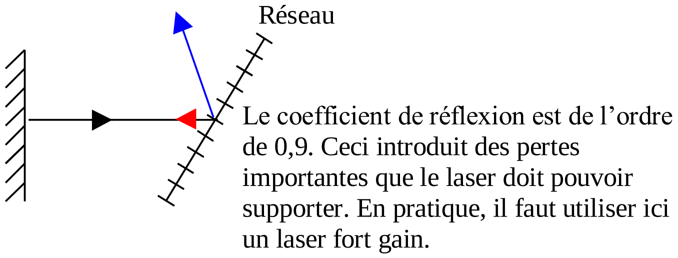
Basculer l'étalon de Fabry Pérot permet de changer la longueur optique de la cavité.

<u>Accord sur une large bande spectrale (de l'ordre du GHz ou du THz)</u>

- Utilisation d'un prisme



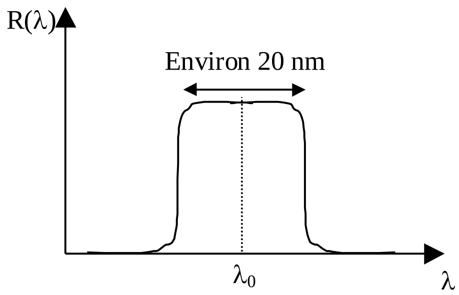
- Utilisation d'un réseau

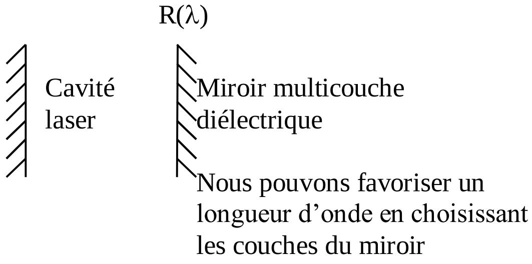


Remarque : Choix entre différentes raies d'émission du milieu amplificateur : cas du laser HeNe

Les longueurs d'ondes possibles de fonctionnement sont les suivantes : 611 nm, 633 nm, 543 nm, 1150nm, 3390 nm

Il suffit de choisir le facteur de réflexion d'un des miroirs comme suit





CHAPITRE IV – LASERS IMPULSIONNELS

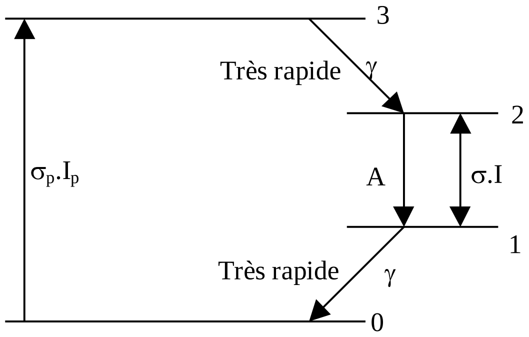
I – Oscillateurs impulsionnels

1 – Equation d'évolution

Le but de cette partie est de déterminer les équations donnants $\frac{d\Delta n}{dt}$ et $\frac{dI}{dt}$.

<u>Equation d'évolution sur l'inversion de population :</u>

Nous supposons que le milieu amplificateur est un milieu à 4 niveaux.



Nous posons $n_t = n_0 + n_1 + n_2 + n_3$

Il vient facilement que

$$\frac{dn_3}{dt} = -\gamma . n_3 + \sigma_p . I_p .(n_0 - n_3)$$

Nous supposerons que $n_0 \approx n_t$, ce qui revient à supposer que les électrons redescendent assez rapidement. L'équation que nous avions précédemment devient :

$$\frac{dn_3}{dt} \approx -(\gamma . n_3 + \sigma_p . I_p . n_3) + \sigma_p . I_p . n_t$$

Soit, après résolution de cette équation

$$n_3 = \sigma_p . I_p . \frac{n_t}{\gamma} . \left(1 - e^{-t/\gamma}\right)$$

γ est très grand, ce qui impose que n_3 évolue très rapidement vers sa valeur stationnaire.

$$n_3 \approx \sigma_p.I_p.\frac{n_t}{\gamma}$$

Or $\Delta n = n_2 - n_1 \approx n_2$ puisque par hypothèse $n_1 = 0$.

Or

$$\frac{dn_2}{dt} = -A.n_2 + \sigma.I.(n_1 - n_2) + \gamma.n_3 \approx -A.n_2 - \sigma.I.n_2 + \gamma.n_3$$

Nous obtenons donc

$$\frac{d\Delta n}{dt} = -(A + \sigma.I).n_2 + \sigma_p.I_p.n_t$$

$\Delta n = \Delta n_0$ si $I = 0$ et $\frac{d\Delta n}{dt} = 0$ (régime stationnaire). Ainsi

$$\Delta n_0 = \frac{\sigma_p.I_p.n_t}{A}$$

Finalement

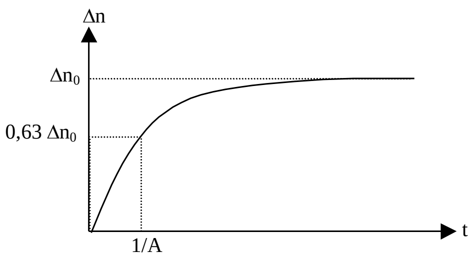
$$\boxed{\frac{d\Delta n}{dt} = -\Delta n(A + \sigma.I) + A.\Delta n_0}$$

Dans le cas où : $\sigma_p.I_p << A$, $I_s = \frac{A}{\sigma}$

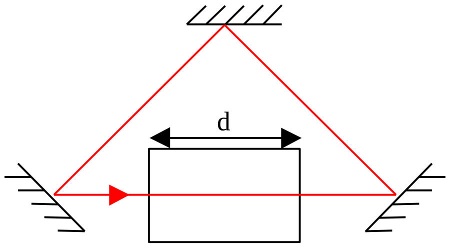
$$\boxed{\frac{d\Delta n}{dt} = A.\left[\Delta n_0 - \Delta n - \frac{I}{I_s}.\Delta n\right]}$$

Remarque : Si nous mettons le milieu amplificateur seul avec I = 0

$$\frac{d\Delta n}{dt} = A.[\Delta n_0 - \Delta n]$$
$$\Delta n = \Delta n_0.\left(1 - e^{-A.t}\right)$$



Equations d'évolution de l'intensité :



Nous faisons les hypothèses suivantes :

- Faibles pertes
- Faible gain dans le milieu amplificateur

Nous noterons *dt* le temps mis par le rayon pour faire un tour de cavité. Ce temps *dt* sera supposé négligeable devant le temps caractéristique de variation de Δn et I

A la date t, le rayon a effectué k tours.

$$I(t) = I_k$$

Un tour plus tard

$$I_{k+1} = R_1.R_2.R_3.G_k.I_k$$

La variation d'intensité en un tour est donc

$$dI = I_{k+1} - I_k = (R_1.R_2.R_3.G_k - 1).I_k$$

Soit

$$\frac{dI}{dt} = (R_1.R_2.R_3.G_k - 1).\frac{I.c}{L_{opt}}$$

avec $G_k = \exp\left[\int_0^d (\sigma.\Delta n(t) - \alpha).dz\right]$

L'hypothèse de faibles pertes impose que $I(z)$, et donc $\Delta n(z)$, est constante. L'équation donnant G_k devient :

$$G_k = \exp[\sigma.\Delta n(t).d - \alpha.d] \approx 1 + \sigma.\Delta n(t).d - \alpha.d \text{ (faible gain)}$$

Ainsi, l'équation d'évolution de I devient

$$\frac{dI}{dt}=\frac{I.c}{L_{opt}}.\left[(1+\sigma.\Delta n(t).d+\alpha.d).(1-T_1).(1-T_2).(1-T_3)-1\right]$$
$$\frac{dI}{dt}=\frac{I.c}{L_{opt}}.\left[(1+\sigma.\Delta n(t).d+\alpha.d).(1-T_1-T_2-T_3)-1\right]$$

Nous posons $\boxed{\rho=T_1+T_2+T_3+\alpha.d}$ les pertes dans la cavité.

$$\frac{dI}{dt}=\frac{I.c}{L_{opt}}.(\sigma.\Delta n(t).d-\rho)$$

Nous appelons Δn_s l'inversion de population au seuil, c'est à dire lorsque $R_1.R_2.R_3.G_0=1$ avec $G_0=\exp((\sigma.\Delta n_s-\alpha).d)$.

$$\frac{dI}{dt}=\frac{I.c}{L_{opt}}.\sigma.d.(\Delta n(t)-\Delta n_s)=\frac{I.c}{L_{opt}}.\frac{\rho}{\Delta n_s}.(\Delta n(t)-\Delta n_s)$$

Nous appelons τ_c les temps de vie du photon dans la cavité :

$$\boxed{\tau_c=\frac{L_{opt}}{c.\rho}}$$

Finalement, l'équation dévolution de l'intensité dans la cavité laser est :

$$\boxed{\frac{dI}{dt}=\frac{I}{\tau_c.\Delta n_s}.(\Delta n-\Delta n_s)}$$

<u>Ordres de grandeur :</u>

Dans le cas du ND : YAG :

Le temps caractéristique τ d'évolution de Δn est de l'ordre de 230 µs

Pour les paramètres suivants : L_{opt} = 1m , Pertes=0,1 , nous calculons τ_c = 33 ns.

Or τ_c est lié à l'évolution de I. Ainsi, nous voyons que Δn et I n'évoluent pas avec les mêmes constantes de temps. Ceci impose qu'il y ait un régime transitoire au démarrage du laser.

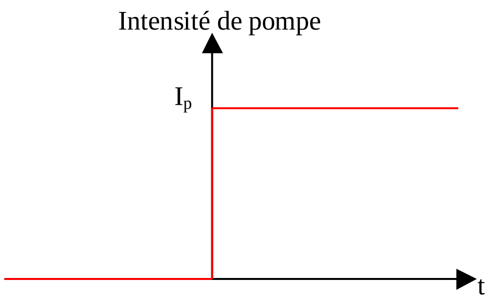
Dans le cas du gaz, τ et τ_c sont du même ordre de grandeur (de l'ordre de 10 ns). Ainsi, Δn et I varient en même temps, et il y aura peu de régime transitoire.

2 – Régime transitoire et commutation de gain

La commutation de gain consiste à mettre en route le laser, puis de l'éteindre.

Réponse à un échelon de pompage

Nous considérons une intensité de pompe variant en fonction du temps comme suit



c.f. annexe : Equation d'évolution - page 1

Nous voyons que lorsque nous mettons en route le laser, ce dernier créer une impulsion.

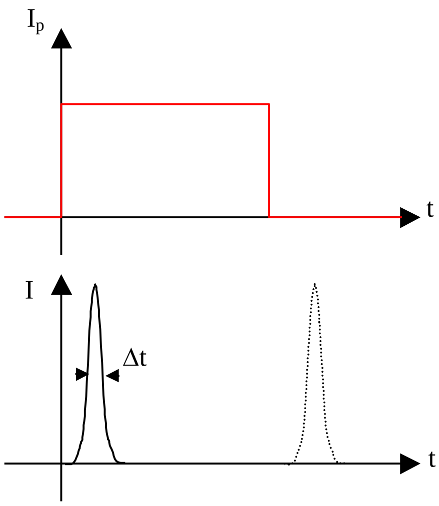
c.f. annexe : Equation d'évolution – page 2 – Exemple de régimes transitoires

Nous voyons donc que par nature, le laser émet des impulsions. Le problème est que ces dernières sont peu contrôlables. L'idée consiste ici à exploiter le régime transitoire du laser pour créer une impulsion propre.

Régime de commutation de gain (gain-switch en anglais)

Nous savons que le laser émet plusieurs impulsions lors de son régime transitoire. Nous voudrions isoler un seul de ces pics.

Remarque : isoler le premier pic permet de récupérer plus d'énergie dans l'impulsion, mais aussi de pouvoir créer un train d'impulsions identiques en recommençant à chaque fois le régime transitoire du laser.



Nous voyons que sous réserve d'éteindre le laser suffisamment tôt (couper la pompe), nous pouvons éviter que la seconde impulsion du régime transitoire ne se déclenche. Nous n'avons bien ici récupéré qu'une impulsion du régime transitoire du laser.

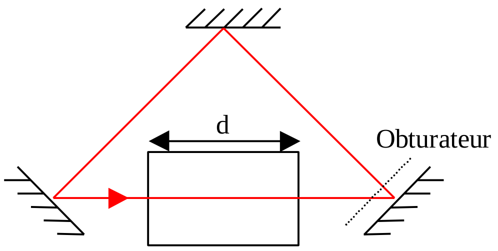
Cette méthode est utilisée pour les diodes laser entre autre, et permet d'atteindre des durées d'impulsion Δt de l'ordre de 1 ns, voire même de 100 ps.

3 – Régime Déclenché (ou Q-switch)

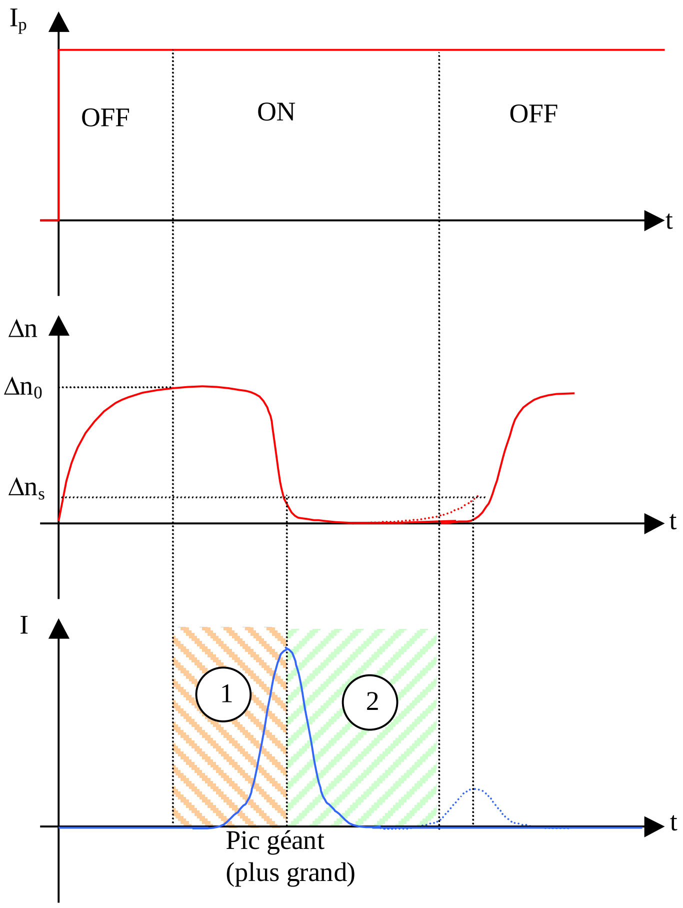
Remarque : le Q de Q-switch représente le coefficient de saturation, qui s'apparente à la finesse du Fabry Pérot créé par la cavité résonante.

Dans la partie précédente, l'inversion de population Δn était assez proche de Δn_s. Ainsi le milieu amplificateur se chargeait peu, et l'énergie contenue dans l'impulsion était assez faible. Pour obtenir des impulsions plus énergétiques, il faudrait attendre que le milieu amplificateur soit entièrement chargé. Pour se faire, nous introduisons donc dans la cavité un obturateur qui provoquera :

- Soit des pertes gigantesques (obturateur présent). Le milieu amplificateur se charge.
- Soit il laissera le laser fonctionner correctement (obturateur enlevé). Le milieu amplificateur se décharge.



Nous traçons les chronogrammes de Δn et I :



En pointillé est représenté ce qui se passerait pour I et Δn si l'obturateur restait ON.

Paramètres influençant les fronts de montée et de descente de $I(t)$:

- Front de monté (zone 1)

Nous supposons $\Delta n_0 >> \Delta n_s$, et nous prenons l'origine des temps à la montée.

A t = 0, $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{I}{\tau_c.\Delta n_s}.(\Delta n_0 - \Delta n_s) \approx \dfrac{I}{\tau_c.\Delta n_s}.\Delta n_0$

Ce qui donne après résolution

$$I(t) = I_0.\exp\left(\frac{\Delta n_0}{\tau_c.\Delta n_s}.t\right)$$

Remarque : Le terme I_0, intensité initiale, est due à l'émission spontannée. Il ne faut pas oublier que sans déséquilibre (du à l'émission spontannée), il n'y a pas déclenchement d'impulsion.

Or $\tau_c.\Delta n_s = \dfrac{L_{opt}}{c.\sigma.d}$

Il vient ainsi

$$\boxed{I(t) = I_0.\exp\left(\frac{c}{L_{opt}}.(\sigma.\Delta n_0.d).t\right)}$$

Temps d'un tour de cavité

Gain petit signal

Pour avoir un fort front de montée, il faut une cavité courte et un gain important.

- Front de descente (zone 2)

Nous prenons l'origine des temps au maximum de l'impulsion.

A t = 0, $\dfrac{dI}{dt} = 0$, $\Delta n = \Delta n_s$ et I est très grande.

$$\frac{d\Delta n}{dt} = \frac{1}{\tau}.\left(\Delta n_0 - \Delta n - \frac{I}{I_s}.\Delta n\right) << 0$$

L'inversion de population Δn décroît donc très rapidement. Nous supposerons donc que pour $t > 0$, $\Delta n << \Delta n_s$. Ainsi

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I}{\tau_c.\Delta n_s}.(\Delta n - \Delta n_s) \approx -\frac{I}{\tau_c}$$

$$\boxed{I = I_{\max}.\exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)}$$

En conclusion : Pour avoir une impulsion très courte, il faut

- **Un gain G_0 important (pour le front de monté zone 1)**
- **Des pertes élevées, qui peuvent être obtenues en jouant sur les transmissions *T* des miroirs (pour le front de descente zone 2)**
- **Une cavité de petite taille**

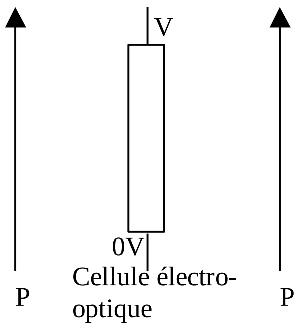
<u>Méthode de commutation des pertes :</u>

Nous allons voire maintenant comment nous pourrions fabriquer l'obturateur dont nous avons besoin. Il existe deux grandes catégories de modulateurs : les modulateurs actifs (action extérieure sur la cavité), et les modulateurs passifs. Nous allons dans un premier temps nous intéresser aux modulateurs actifs.

- Déclenchement actif

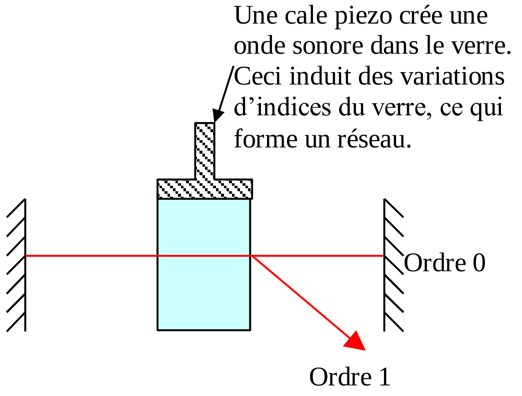
  Faire tourner un des miroirs.

  Modulateur électro-optique (modulateur de lumière)



La transmission T de la cellule électro-optique dépend de la tension V à ses bornes. Si la tension est nulle, T = 1. Au contraire, il existe une certaine tension V pour laquelle T = 0.

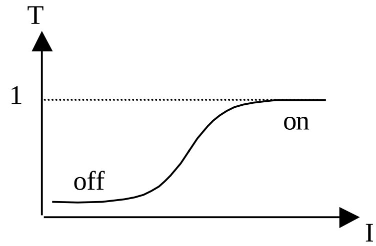
Modulateur acousto-optique

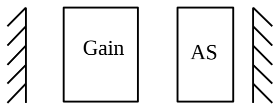


La nature du réseau permet de fixer les pertes dans la cavité ; c'est un modulateur de perte.

- Déclenchement passif

L'absorbant saturable





Au début, l'absorbant saturable est dans l'état off, ce qui crée beaucoup de pertes. Par la suite, Δn augmente jusqu'à égaler les pertes. Alors I augmente, et nous glissons vers l'état on de l'absorbant saturable.

c.f. annexe : Equations d'évolution page 3

4 – Synchronisation des modes en phase (ou Mode lock)

La synchronisation des modes en phase se rapporte aux interférences entre les différents modes longitudinaux de la cavité définis par

$$\nu_k = \frac{k.c}{2.L_{opt}}$$

Remarque : Les battements entre deux fréquences voisines sont un exemple d'interférence entre deux ondes de fréquence différentes.

<u>Calcul de l'intensité $I(t)$ en sortie du laser pour N modes :</u>

Nous considérons N modes allant du m-ième au ($m + N - 1$)-ième. Pour un des modes, l'amplitude du champ électrique qui lui correspond s'écrit :

$$\mathrm{E}_k = E_k.\exp\left[i.\left(2.\pi.\nu_k.t + \varphi_k\right)\right]$$

L'expression du champ électrique total est donnée par la relation

$$\mathrm{E} = \sum_{k=m}^{m+N-1} \mathrm{E}_k$$

Nous supposerons pour simplifier le problème que tous les ordres ont la même amplitude E et que tous les modes sont synchronisés en phase ($\varphi_k = \varphi = Cte$).

$$\mathrm{E} = E.\sum_{k=m}^{m+N-1} \exp i.\left(2.\pi.\frac{k.c}{2.L_{opt}}.t + \varphi\right)$$

Après changement d'indice de la somme par $k = m + q$

$$\mathrm{E} = E.e^{i.\varphi}.e^{2.i.\pi.\frac{m.c}{2.L_{opt}}.t}.\sum_{q=0}^{N-1}\exp\left(i.2.\pi.\frac{q.c}{2.L_{opt}}.t\right)$$

or

$$\sum_{q=0}^{N-1}\exp\left(i.2.\pi.\frac{q.c}{2.L_{opt}}.t\right) = \frac{1-\exp\left(i.\frac{2.\pi.N.c.t}{2.L_{opt}}\right)}{1-\exp\left(i.\frac{2.\pi.c.t}{2.L_{opt}}\right)} = \frac{e^{i.\frac{N}{2}.2.\pi.\frac{c}{2.L_{opt}}.t}}{e^{i.2.\pi.\frac{c}{2.L_{opt}}.t}}.\frac{\sin\left(N.\frac{\pi.c.t}{2.L_{opt}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi.c.t}{2.L_{opt}}\right)}$$

Nous en déduisons l'intensité en sortie du laser

$$\boxed{I(t) = I(0).\frac{\sin^2\left(N.\frac{\pi.c}{2.L_{opt}}.t\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi.c}{2.L_{opt}}.t\right)}}$$

c.f. annexe : Equations d'évolution – page 4

Il résulte donc de ces interférences un train d'impulsion.

A une date *t* voisine de 0, $I(t) = N^2.I_0$ où I_0 est l'intensité d'un mode. Nous voyons donc que les interférences ont pour effet d'augmenter l'intensité émise dans chaque impulsion.

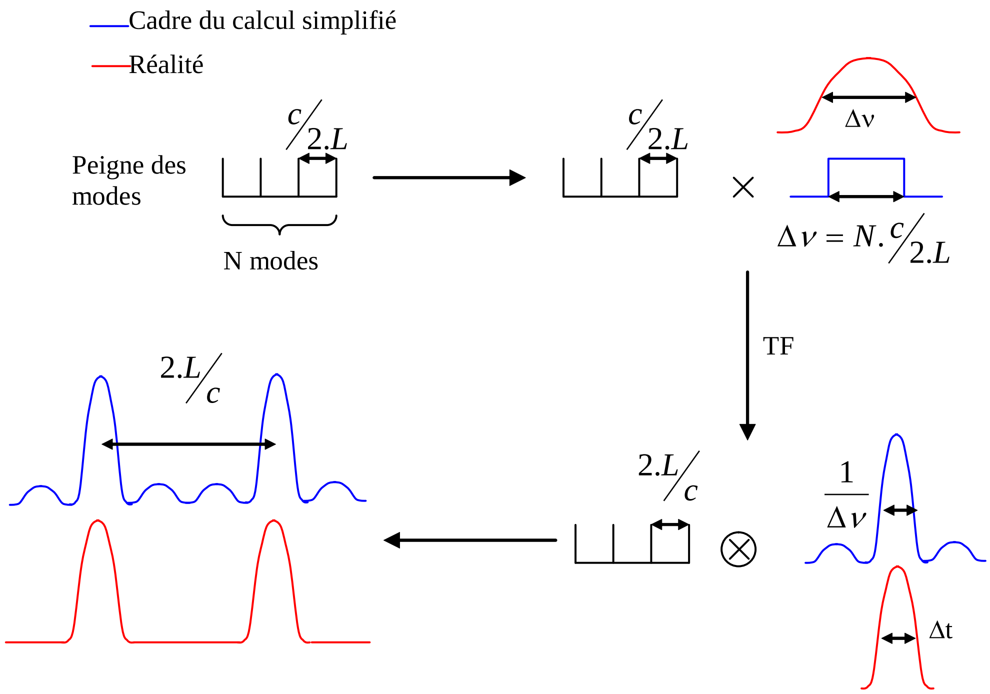
<u>Durée des impulsions :</u>

Le premier zéro est donné par

$$N.\frac{\pi.c.t}{2.L_{opt}} = \pi$$

$$t = \frac{2.L_{opt}}{N.c}$$

Analyse par transformée de Fourrier : Le calcul de l'intensité en sortie du laser pourrait se faire de la manière suivante :



Tout calcul fait, en considérant le spectre en sortie du laser comme gaussien, nous obtenons

$$\boxed{\Delta t.\Delta\nu = 0{,}44}$$

Nous voyons qu'avec ce type de laser, nous pouvons fabriquer des impulsions de durée de l'ordre d'une femtoseconde.

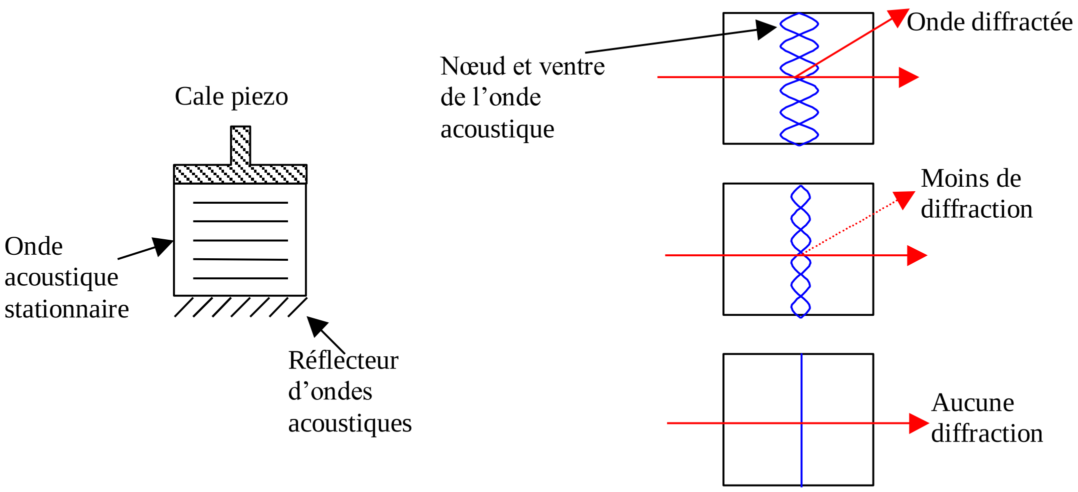
Exemple : Δt = 100 fs pour un laser émettant à 1050 nm et $\Delta\lambda$ = 15 nm.

c.f. annexe : performances typiques des oscillateurs impulsionnels

<u>Comment synchroniser les modes en phase :</u>

- Blocage actif du mode (Active mode lock)

  Modulateur acousto-optique :



En sortie, $I(t) = (1+\varepsilon.\cos 2.\pi.f.t)$ où ε est l'amplituide de modulation (de l'ordre de quelques pour-cents). Et *f* est la fréquence de l'onde stationnaire acoustique.

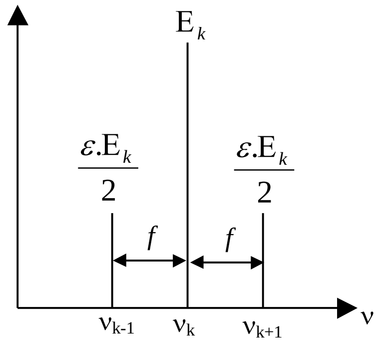
Dans le laser, le modulateur acousto-optique (MAO) se place au milieu de la cavité laser.

Effet de la modulation sur un mode de la cavité ν_k :

Sans MAO : $\mathrm{E}_k = E_k.\exp(j(2.\pi.\nu_k.t+\varphi_k))$

Avec MAO : $\mathrm{E}_k = E_k.(1+\varepsilon.\cos(2.\pi.f.t)).\exp(j(2.\pi.\nu_k.t+\varphi_k))$

Si $f = \dfrac{c}{2.L}$, les modes ν_{k-1} et ν_{k+1} démarrent avec les phases φ_k.



- Déclenchement passif

En utilisant un absorbant saturable.

II – Amplificateur impulsionnel

L'énergie contenue dans l'impulsion délivrée par le laser est limitée par la densité d'énergie maximale que peuvent supporter les miroirs de la cavité (de l'ordre de 2 – 3 J/cm²). Aussi pour éviter de détériorer la cavité, il est nécessaire d'amplifier l'impulsion laser après qu'elle soit sortie du laser.

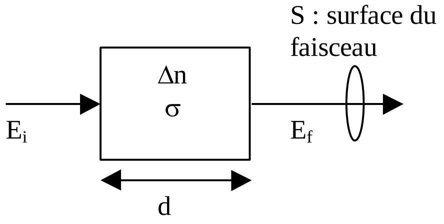
Pour un laser impulsionnel :

- en Q-switch, il est intéressant d'amplifier l'énergie des impulsions
- en mode lock, l'énergie contenue dans une impulsion est de l'ordre du nJ. Il est donc indispensable d'amplifier l'impulsion.

Dans un amplificateur d'impulsion, il n'y a pas de régime stationnaire. Nous n'utiliserons donc pas les grandeurs utilisées d'habitude

Continu	**Impulsionnel**
Puissance (W, photon/sec)	Energie (J, nb photons)
Intensité (W/cm², photon/sec/cm²)	Densité d'énergie (J/cm², photon/cm²)

1 – Energie en sortie d'un amplificateur



La formule de Franz-Nodvik donne

$$E_f = J_{sat}.S.\ln\left[e^{\sigma.\Delta n.d}.\left(\exp\left(\frac{E_i}{J_{sat}.S}\right)-1\right)+1\right]$$

Avec $J_{sat} = \dfrac{h.\nu}{\sigma}$

Dans la suite, nous poserons les densités d'énergie suivantes

$$J_i = \frac{E_i}{S}$$

$$J_f = \frac{E_f}{S}$$

2 – Allure de la saturation

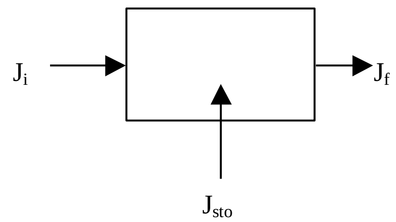
c.f. annexe : Allure de la saturation dans un amplificateur d'impulsions

Nous pouvons considérer que J_f est une fonction linéaire de J_i de pente 1.

$$J_f = J_{sat}.\left[\sigma.\Delta n.d + \frac{J_i}{J_{sat}}\right] = J_{sat}.\sigma.\Delta n.d + J_i = h.\nu.\Delta n.d + J_i$$

où $h.\nu.\Delta n.d$ est la densité d'énergie J_{sto} stockée par le milieu.

3 – Rendement d'extraction ρ



Par définition

$$\boxed{\rho = \frac{J_f - J_i}{J_{sto}}}$$

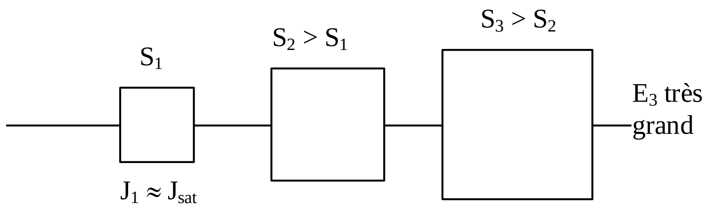
c.f. annexe : rendement d'extraction

Pour le Cr^{3+}, $Be_xAl_yO_3$, Alexandrite

Nous remarquons pour J_i proche de J_{sat}, ρ est proche de 1 (bon rendement).

Attention : Le seuil de dommage optique est de l'ordre de 1 à 10 J/cm².

Si J_{sat} > 10 J/cm², il y a problème. Il faut utiliser un amplificateur multipassage.

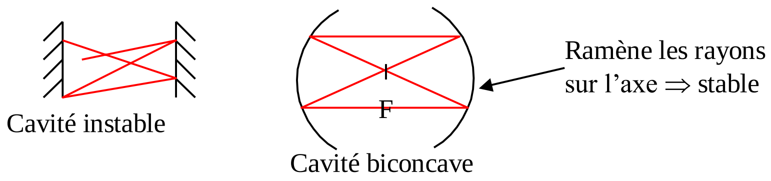


On augmente les surfaces pour résoudre le problème des seuils de dommage.

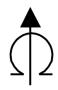
CHAPITRE V – OPTIQUE DES LASERS

I – Approche intuitive : intérêt de l'onde sphérique gaussienne

1 – Confinement transverse de l'intensité



Repartition transverse imposée par la diffraction :



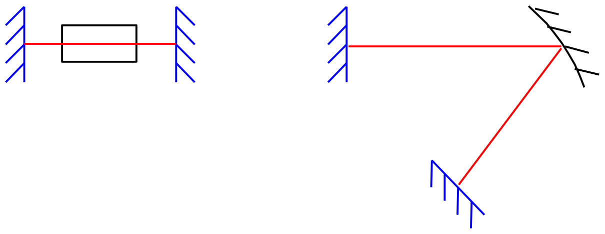
2 – Stationnarité de l'onde

Nous l'avons vu, pour qu'il y ait oscillation, l'onde doit être invariante après un tour (cavité en anneau) ou un aller-retour (cavité linéaire). Il y a donc invariance de l'onde par propagation dans la cavité.

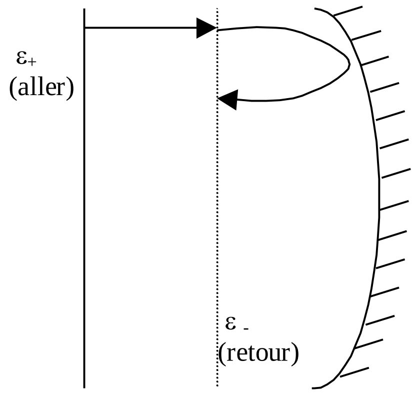
Remarque concernant les cavités linéaires : forme de l'onde sur les miroirs d'extrémités de la cavité :

Les miroirs qui interviennent dans la formation des cavités linéaires ne sont pas forcément plan.

Exemple de cavités linéaires (en bleu sont représentés les miroirs d'extrémité) :



Dans une cavité linéaire, l'onde lumineuse est stationnaire ; il y a donc des nœuds et des ventres qui se forment dans la cavité, et en particulier des nœuds sur les miroirs d'extrémités.



Pour tout point M du miroir, $\varphi_{\varepsilon_+}(M) = \varphi_{\varepsilon_-}(M) + \pi$ *. Nous pouvons en déduire que les deux plans d'onde* ε_+ *et* ε_- *ont la même forme. Ainsi, si le miroir est :*

- *plan,* ε_+ *et* ε_- *sont des fronts d'onde plans au niveau du miroir*
- *sphérique de rayon R,* ε_+ *et* ε_- *ont le même forme que le miroir et sont donc des fronts d'onde sphériques de rayon de courbure R*

3 – L'onde sphérique gaussienne

Définition de l'amplitude complexe :

Si l'onde se propage selon l'axe *Oz*, par définition l'amplitude complexe est :

$$E(x,y,z,t) = E_0(z).\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right).\exp\left(-j.k.\frac{x^2+y^2}{2.R(z)}\right).\exp\left(-j\left(k.z-\varphi(z)\right)+\omega.t\right)$$

La première exponentielle correspond à la répartition transverse de l'onde (maximum en *z* = 0)

La seconde et la troisième exponentielle représentent le déphasage apporté par une onde sphérique + $\varphi(z)$.

Définition du rayon de courbure complexe q(z) :

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - j.\frac{\lambda}{\pi.w^2(z)}$$

où λ est la longueur d'onde dans le milieu ($\lambda = \lambda_0 / n$)

A partir de la définition du rayon de courbure complexe, nous pouvons transformer les deux premières exponentielles dans la définition de l'amplitude complexe en une seule d'expression :

$$\exp\left(-j.k.\frac{x^2+y^2}{2.q(z)}\right)$$

Une propriété de l'onde sphérique complexe est d'être solution des équations de propagation des ondes (dans le cadre de l'approximation paraxiale, voir cours d'optique physique). C'est donc une onde invariante par propagation.

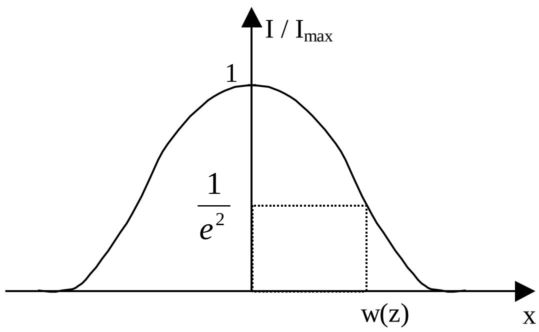
II – Etude détaillée de l'onde sphérique gaussienne

1 – Profil d' « intensité »

Par définition,

$$\boxed{I \propto E.E^{*} = E_0^2(z).\exp\left(-2.\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right)}$$

L'intensité a donc un profil d'allure suivante



Nous définirons par la suite la taille du faisceau comme étant la taille à $\frac{I}{I_{\max}} = \frac{1}{e^2}$, rayon du faisceau dans le plan *z*.

2 – Propagation « libre » (milieu homogène d'indice *n*)

Voir TD et cours d'optique physique pour plus de précision

Nous donnons les relations suivantes :

$$E_0(z) = \left(1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right)^{-1/2}$$

$$z_R = \frac{\pi . w_0^2}{\lambda_{milieu}} \quad \text{(distance de rayleigh)}$$

$$w(z) = w_0 . \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

$$q(z) = z + i.z_R$$

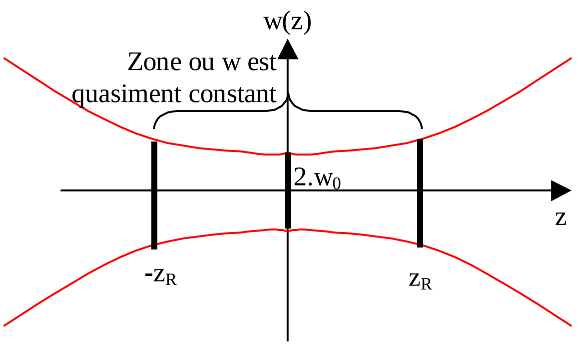
$$R(z) = z.\left(1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right)$$

$$\varphi(z) = \text{Arctan}\left(\frac{z}{z_R}\right)$$

Nous allons maintenant nous intéresser à l'allure du faisceau à travers la représentation de $w(z)$, la taille du faisceau, et $R(z)$, le rayon de courbure du faisceau.

<u>Allure de $w(z)$:</u>

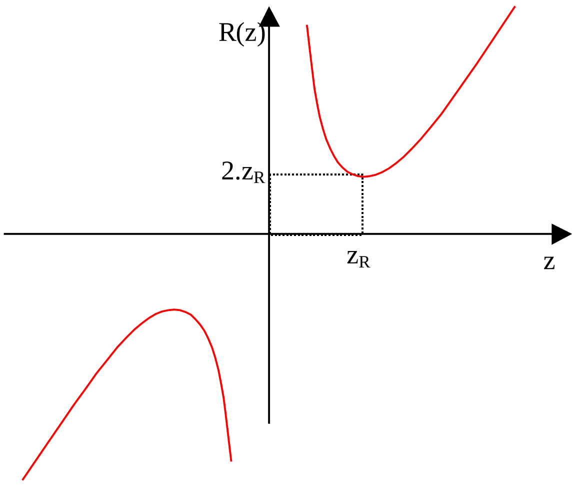
Nous remarquons que $\left(\frac{w(z)}{w_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_R}\right)^2 = 1$, ce qui est une équation d'hyperbole.

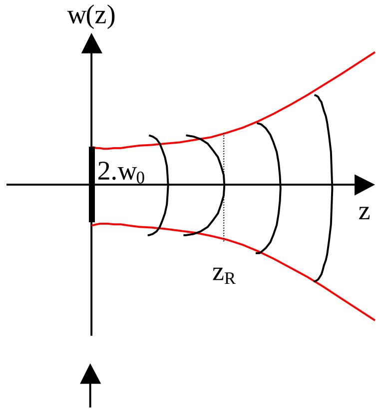


En $z = z_R$, $w(z_R) = \sqrt{2}.w_0$; la surface du faisceau est quasiment doublée. Compte tenu de l'évolution de w(z) qui croît rapidement, nous pourrons considérer que le faisceau est de taille constante sur la zone définie par $|z| < z_R$.

<u>Allure de $R(z)$:</u>

Le rayon de courbure du faisceau est minimum à l'abscisse $z = z_R$.





Nous voyons au vu du schéma ci-dessus représentant la propagation de l'onde laser dans un espace libre, que le faisceau gaussien n'est pas soumis aux règles de l'optique géométrique pour la propagation.

Remarque : La donné de R et w en un point suffit pour décrire l'onde gaussienne entièrement. A partir de ces deux grandeurs, nous pouvons calculer le rayon complexe q(z) duquel nous pouvons tirer la taille du faisceau w_0 (partie imaginaire de q) et l'abscisse du point considéré par rapport au plan z = 0 (partie réelle de q).

Le plan d'abscisse $z = 0$ est appelé le plan du « waist ».

3 – Champ proche et champ lointain

Nous parlerons de champs proche lorsque $z \ll z_R$. Dans cette zone, nous avons les relations suivantes :

$$w(z) = w_0$$
$$R(z) = \infty$$
$$E_0(z) \approx Cte \approx 1$$
$$\varphi(z) \approx 0$$

En champ proche, le faisceau gaussien est équivalent à un faisceau collimaté (rayons parallèles)

Nous parlerons de champs lointain lorsque $z >> z_R$. Dans cette zone, nous avons les relations suivantes :

$$w(z) = w_0 . \frac{z}{z_R}$$

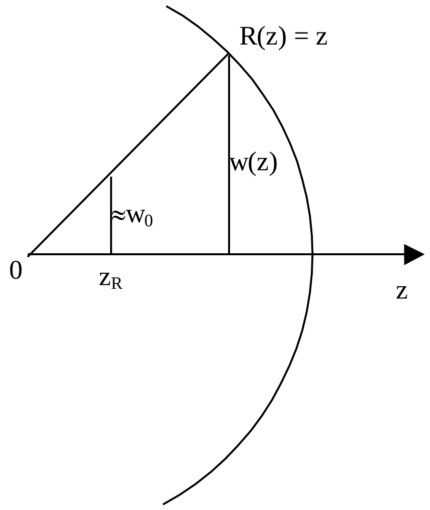
$$R(z) = z$$

$$E_0(z) = \frac{z_R}{z}$$

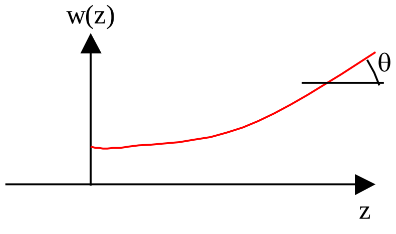
$$\varphi(z) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

En champ lointain, le faisceau gaussien est équivalent à une onde sphérique de point source $z = 0$.

Le schéma ci dessous montre bien qu'en champ lointain, $w(z)$ croît linéairement avec z.



Nous appellerons θ la divergence du faisceau.



$$\theta = \frac{z}{z_R} . \frac{w_0}{z} = \frac{w_0}{z_R}$$

$$\boxed{\theta = \frac{\lambda}{\pi . w_0}}$$

Remarque : il est possible de caractériser le faisceau avec la donnée de θ et z_R.

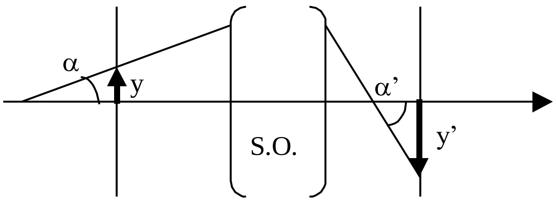
III – Comment faire des cavités « stables » ?

Ici le terme « stable » signifie que l'onde est identique à elle même après un tour de cavité (cavité en anneau), ou un aller retour (cavité linéaire).

1 – Matrice ABCD

Les matrices que nous avons utilisées en optique géométrique pour connaître le chemin d'un rayon à travers un système optique conviennent particulièrement bien à la description de la propagation de l'onde gaussienne. Nous allons rappeler le fonctionnement de ces matrices que nous appelons matrices ABCD.

Définition de la matrice ABCD



Par définition, la matrice ABCD est telle que pour tout couple (α, y),

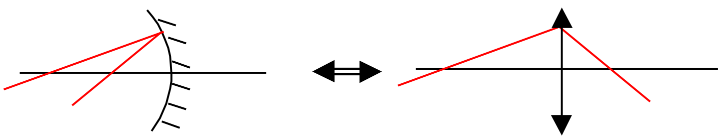
$$\boxed{\begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}}$$

Convention :

Dans la suite, nous prendrons :

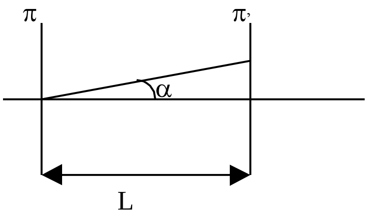
- Pour un miroir concave, $R > 0$
- Pour un miroir convexe, $R < 0$

Nous rappelons également que nous pouvons utiliser cette méthode dans le cadre de l'équivalence complète qu'il existe entre lentille et miroir (Dépliement de système optique)



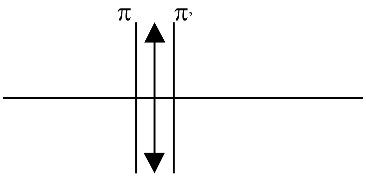
Matrices de base :

- Propagation libre



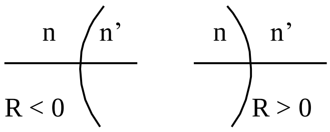
$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

- Lentille de focale f'



$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f'} & 1 \end{pmatrix}}$$

- Dioptre sphérique

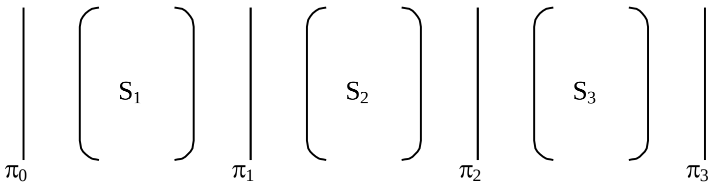


$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R}.\left(1-\dfrac{n}{n'}\right) & \dfrac{n}{n'} \end{pmatrix}}$$

<u>Propriété des matrices ABCD :</u>

- Association de systèmes optiques

Si nous associons plusieurs systèmes optiques

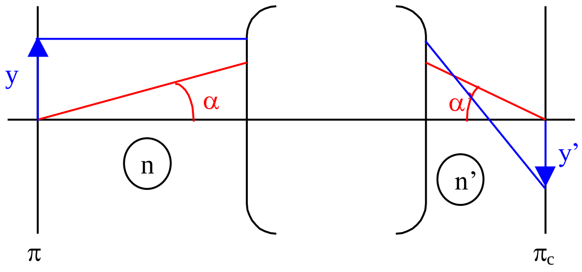


Nous notons M_i la matrice ABCD de passage du plan d'onde π_{i-1} au plan d'onde π_i. La matrice de passage du plan π_0 à π_3 notée M est donnée par

$$M = M_1.M_2.M_3$$

- Matrice ABCD pour deux plans conjugués

Nous cherchons à déterminer la matrice ABCD M de passage du plan π au plan π_c.



Pour le rayon rouge :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

En appelant g_α le grossissement sur l'axe du système optique,

$$\alpha' = D.\alpha = g_\alpha .\alpha$$

Nous obtenons également la relation suivante

$$0 = A \times 0 + B.\alpha$$

Soit

$$\boxed{B = 0}$$

Pour le rayon bleu :

$$\begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & g_\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

En appelant g_y le grandissement du système optique,

$$y' = A.y = g_y .y$$

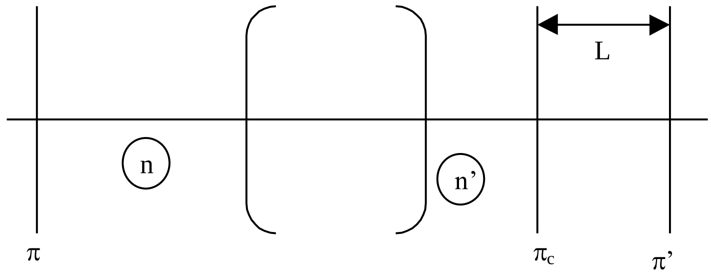
Nous obtenons donc la matrice M suivante :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} g_y & 0 \\ C & g_x \end{pmatrix}}$$

et

$$\boxed{\det M = g_y .g_\alpha = \frac{n}{n'}}$$

Ainsi, nous pouvons déterminer une propriété de la matrice de passage ABCD M' du plan π au plan π', distant de L du plan π_c.



Ainsi

$$M' = M_{\pi_c,\pi'}.M$$

où

$$M_{\pi_c,\pi'} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

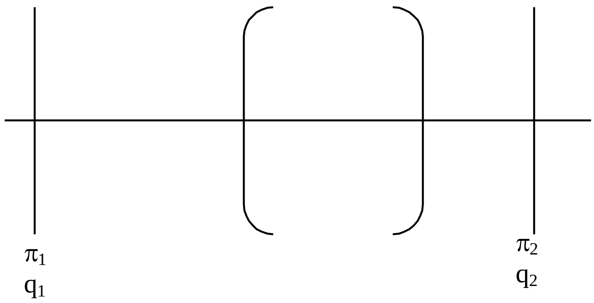
$$\det M' = \det M_{\pi_c,\pi'}.\det M$$

$$\boxed{\det M' = \frac{n}{n'}}$$

2 – Loi ABCD

<u>Enoncé de la loi :</u>

Nous notons q_i le rayon de courbure complexe de l'ode dans le plan π_i.



En notant M la matrice ABCD de passage du plan π_1 au plan π_2,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

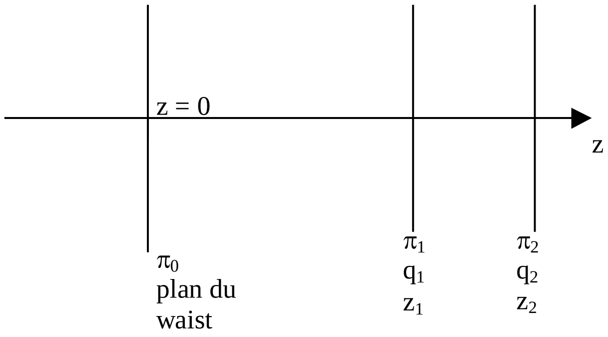
La loi ABCD donne la relation suivante :

$$\boxed{q_2 = \frac{A.q_1 + B}{C.q_1 + D}}$$

<u>Démonstration :</u>

- Propagation libre

  Pour l'onde gaussienne



Par définition

$$q_1 = z_1 + i.z_R$$
$$q_2 = z_2 + i.z_R$$

Soit

$$q_2 - q_1 = z_2 - z_1 = L$$

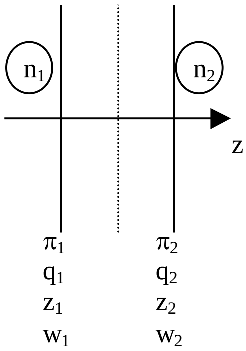
Nous pouvons donc écrire

$$q_2 = q_1 + L = \frac{1 \times q_1 + L}{0 \times q_1 + 1}$$

ce qui correspond bien à une matrice ABCD de la forme

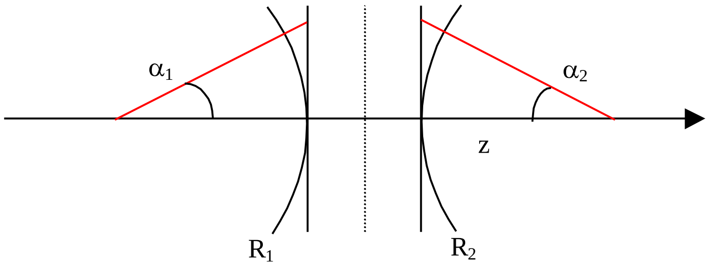
$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Composant mince (lentille – dioptre)



Les deux plans π_1 et π_2 sont collés à la lentille. Le grandissement entre ces deux plans est donc de 1, soit

$$w_1 = w_2$$



Pour le rayon rouge :

Nous appelons M la matrice ABCD de passage du plan π_1 au plan π_2.

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Les deux plans π_1 et π_2 sont conjugués, soit

$$M = \begin{pmatrix} g_y & 0 \\ C & g_\alpha \end{pmatrix}$$

Or $g_y = 1$ et $g_y . g_\alpha = \dfrac{n_1}{n_2}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons ainsi la relation suivante

$$\alpha_2 = C.y_1 + \frac{n_1}{n_2}.\alpha_1$$

or

$$\alpha_2 = \frac{y_2}{R_2}$$

$$\alpha_1 = \frac{y_1}{R_1}$$

Soit

$$\frac{y_2}{R_2} = C.y_1 + \frac{n_1}{n_2}.\frac{y_2}{R_2}$$

Or, le grandissement étant de 1,

$$\frac{1}{R_2} = C + \frac{n_1}{n_2}.\frac{1}{R_2}$$

or nous avons donné plus tôt la relation suivante

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} + i.\frac{\lambda_{milieu}}{\pi.w^2}$$

Ainsi, la relation précédente devient

$$\frac{1}{q_2} = C + \frac{1}{q_1}.\frac{n_1}{n_2}$$

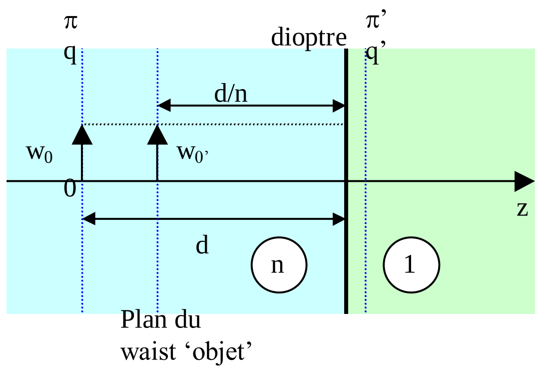
où encore

$$q_2 = \frac{q_1}{C.q_1 + \frac{n_1}{n_2}}$$

Ce qui correspond bien à une matrice ABCD de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

1ère application de la loi ABCD : « image » d'un waist à travers un dioptre plan



Le plan π' est placé juste derrière le dioptre. Est noté prime tout ce qui touche à l'image du waist.

La matrice M de passage de π à π' s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

L'origine des abscisses est prise dans le plan π, donc

$$q = i.z_R = i.\frac{\pi.w_0^2}{\lambda_{milieu}}$$

La loi ABCD donne

$$q' = \frac{q+d}{n} = \frac{d}{n} + i.\frac{\pi.w_0^2}{\lambda_0}$$

où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide.

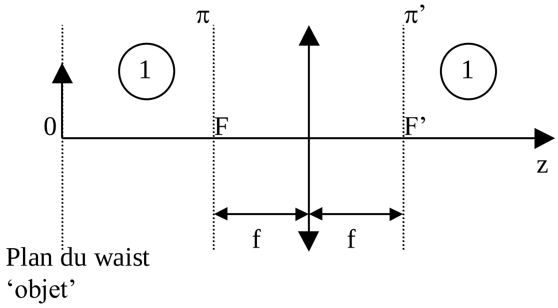
Or par définition

$$q' = z' + i.z'_R = z' + i.\frac{\pi.w'^2_0}{\lambda_0}$$

Par identification, nous obtenons

$$\boxed{\begin{array}{l} z' = \dfrac{d}{n} \\ w'_0 = w_0 \end{array}}$$

$2^{ème}$ application : taille et position du waist à travers une lentille



Est noté prime tout ce qui touche à l'image du waist

La matrice de passage M du plan π au plan π' s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & f' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f' & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & f' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f' \\ -1/f' & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le plan π, par définition

$$q = z + i.z_R$$

La loi ABCD donne dans le plan π'

$$q' = \frac{f'}{-q/f'} = -\frac{f'^2}{q}$$

Soit

$$q' = -f'^2 . \frac{1}{z + i.z_R} = -\frac{f'^2 .z}{z^2 + z_R^2} + i.\frac{f'^2 .z_R}{z^2 + z_R^2}$$

Or par définition

$$q' = z' + i.z'_R$$

Nous obtenons par identification

$$\boxed{\begin{aligned} z' &= -\frac{f'^2 .z}{z^2 + z_R^2} \\ z'_R &= \frac{f'^2 .z_R}{z^2 + z_R^2} \end{aligned}}$$

Nous allons maintenant essayer de déterminer la taille w'_0 du waist 'image'. Dans le plan π, la taille du faisceau est donnée par

$$w^2 = w_0^2.\left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right) = w_0^2.\left(\frac{z_R^2 + z^2}{z_R^2}\right)$$

or par définition

$$z_R = \frac{\pi.w_0^2}{\lambda}$$

Soit

$$w^2 = \frac{z_R^2 + z^2}{z_R}.\frac{\lambda}{\pi}$$

$$\frac{z_R}{z_R^2 + z^2} = \frac{\lambda}{\pi.w^2}$$

Nous pouvons donc en déduire, à partir des calculs précédents, une nouvelle expression de z'_R

$$z'_R = f'^2.\frac{\lambda}{\pi.w^2}$$

Or par définition

$$z'_R = \frac{\pi.w'_0}{\lambda}$$

Soit

$$w'_0 = f'.\frac{\lambda}{\pi.w}$$

Remarque : taille minimale w'_0

Pour une lentille de diamètre de l'ordre de sa focale ($\varnothing \approx f'$) et $w \approx f'/2$ dans le plan π,

$$w'_0 = \frac{f'\lambda}{\pi.f'/2} = \frac{2.\lambda}{\pi}$$

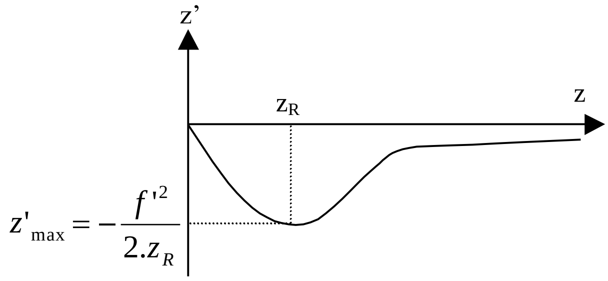
La surface minimale correspondante

$$\pi.w_0^2 = \pi.\frac{4.\lambda^2}{\pi^2} = \frac{4}{\pi}.\lambda^2 \approx \lambda^2$$

La surface minimale du faisceau image est donc de l'ordre de λ^2. Ceci est notamment important pour les Cds sur lesquels les 'sillons' doivent être les plus fins possibles. Ceci explique pourquoi on essaye de passer du rouge au bleu.

Remarque : à propos de la position du waist image

Si $z > 0$, alors $z' < 0$; le plan du waist image se situe après π'. Ceci est un résultat classique d'optique géomètrique.



Cas extrêmes :

- $z = 0$, le waist « objet » est au foyer objet de la lentille

  $z' = 0$, le plan du waist image est au foyer image

- Si $z \to \infty$, le plan du waist objet est à l'infini

  $z' \to 0$, le plan du waist image est en f'

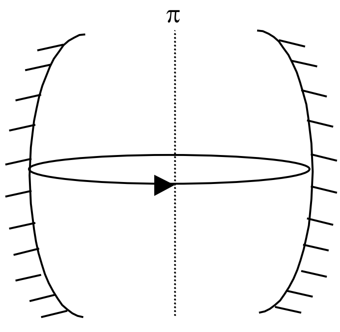
Lorsque $z >> z_R$, la position du waist image peut être déterminée dans le cadre de l'optique géométrique.

Lorsque $z << z_R$, $|z'_{max}| << f'$. Le waist est pratiquement au foyer image F'.

Remarquons que la position z' du waist dépendant de z_R, z' dépendra également de la taille du faisceau.

3 – Critère de stabilité d'une cavité

La cavité sera stable si l'onde se propageant dans la cavité est invariante sur un tour (cavité en anneau) ou un aller-retour (cavité linéaire).



$$M_{\pi,\pi'} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

La stabilité de la cavité impose qu'il existe q tel que

$$q = \frac{A.q + B}{C.q + D}$$

Soit

$$C.q^2 + (D-A).q - B = 0$$

Par définition

$$q = z + i.z_R$$

où $z_R = \dfrac{\pi.w_0^2}{\lambda} > 0$ est non nulle, ce qui signifie que q est toujours complexe.

Le discriminant de l'équation en q s'écrit

$$\Delta = (D-A)^2 + 4.C.B < 0$$

Ce dernier étant non nulle.

Dans le cas où $|\mathrm{tr}(M/2)| < 1$, les solution q s'écrivent

$$q = \frac{-(D-A) \pm i.\sqrt{\Delta}}{2.C}$$

Or la partie imaginaire de q est strictement positive (puisque $z_R > 0$). La seule solution q est donc

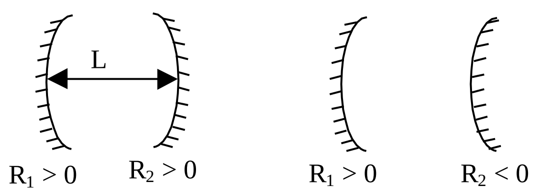
$$\boxed{q = \frac{-(D-A) + i.\sqrt{\Delta}}{2.C}} \text{ si } C > 0$$

Il n'y a donc qu'une seule répartition transverse possible pour un faisceau gaussien. Ce dernier est le mode propre de la cavité (Eigen Mode)

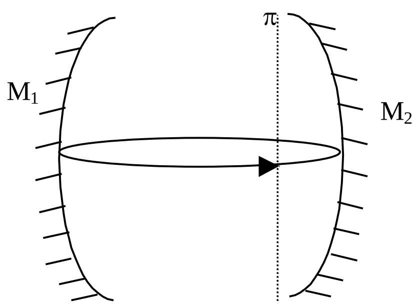
4 – Cavité à deux miroirs

<u>Première méthode :</u>

Les signes des rayons de courbure des miroirs d'extrémité seront choisis ainsi



Nous allons exprimer la condition de stabilité d'une cavité linéaire.



Le plan π est placé au niveau du miroir M_2.

La matrice de passage M du plan π au plan π après un aller-retour s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2.L}{R_1}\right).\left(1 - \frac{2.L}{R_2}\right) - \frac{2.L}{R_2} & \bullet \\ \bullet & -\frac{2.L}{R_1} + 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons donc calculer la trace de $M/2$:

$$\mathrm{tr}(\frac{M}{2}) = \frac{1}{2}.\left[\left(1 - \frac{2.L}{R_1}\right).\left(1 - \frac{2.L}{R_2}\right) - \frac{2.L}{R_2} - \frac{2.L}{R_1} + 1\right] = 2.\left(1 - \frac{L}{R_1}\right).\left(1 - \frac{L}{R_2}\right) - 1$$

or d'après les calculs de la partie précédente,

$$-1 < \mathrm{tr}\left(\frac{M}{2}\right) < 1$$

Soit

$$\boxed{0 < \left(1 - \frac{L}{R_1}\right).\left(1 - \frac{L}{R_2}\right) < 1}$$

Nous définissons les deux paramètres g_1 et g_2 de la manière suivante :

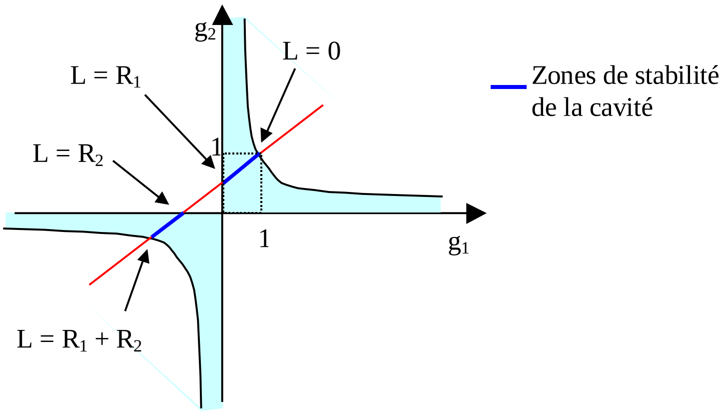
$$\boxed{\begin{aligned} g_1 &= 1 - \frac{L}{R_1} \\ g_2 &= 1 - \frac{L}{R_2} \end{aligned}}$$

La condition sur la trace de M s'écrit avec ces nouveaux paramètres

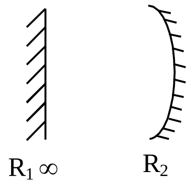
$$0 < g_1.g_2 < 1$$

Soit

$$\boxed{\begin{array}{l} g_2 < \dfrac{1}{g_1} \\ g_1 \text{ et } g_2 \text{ de même signe} \end{array}}$$



Remarque : Dans le cas où le miroir M_1 est plan



$g_1 = 1$ *et* $g_2 = 1 - \dfrac{L}{R_2}$. *La condition de stabilité s'écrit*

$$L < R_2$$

Remarque : Si π est le plan du waist, $q = i.z_R$ et $A = D$.

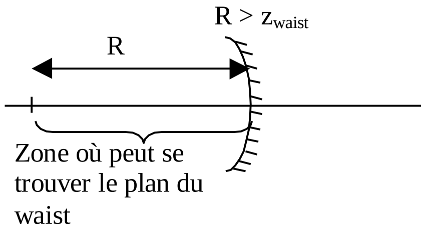
<u>Deuxième méthode :</u>

Il existe une deuxième méthode géométrique pour déterminer les longueurs de cavité qui réponde à la condition de stabilité de la cavité laser.

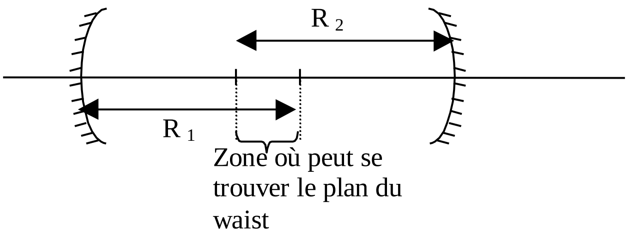
Si M_1 et M_2 sont les miroirs d'extrémité, leur rayon de courbure R_1 et R_2 sont forcément les rayons de courbure de l'onde (mode propre) au niveau des miroirs M_1 et M_2. Or pour l'onde gaussienne :

$$R(z) = z.\left(1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right) > z$$

Ainsi pour chaque miroir, nous pouvons facilement déterminer la zone où se trouve le waist du faisceau gaussien.



Pour les deux miroirs, ces deux zones doivent se recouvrir puisqu'il n'existe qu'un seul plan du waist.



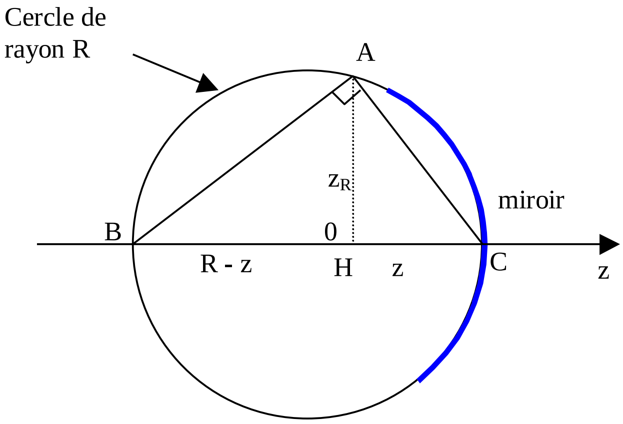
Ainsi $L < R_1 + R_2$ est une condition nécessaire à la réalisation d'une cavité résonnante. Il nous manque encore, en comparaison avec la première méthode, deux bornes à déterminer. Les équations du faisceau gaussien nous donnent :

$$R = z\left(1+\left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right)$$

Soit

$$R - z = \frac{z_R^2}{z}$$
$$(R-z).z = z_R^2$$

Ainsi, en traçant un cercle de rayon *R*, le rayon de courbure d'une des miroirs, et en le faisant confondre avec le miroir en question, nous pouvons déterminer l'ensemble des plans qui peuvent être le plan du waist.



Voir annexe :Méthode des cercles

Le plan du waist est situé au point d'intersection des deux cercles correspondants aux deux miroirs de la cavité ; la cavité sera stable seulement si ces deux cercles se coupent.

Remarque : Si la cavité est symétrique, le plan du waist est obligatoirement au centre de la cavité.

IV – Modes d'ordre supérieur

1 - Notion de 'mode'

Un mode est l'association d'une fréquence et d'une répartition transverse.

Exemple de mode : le mode TEM (Transverse Electromagnetic Mode)

2 - Onde hermitienne-gaussienne

Définition :

L'onde hermitienne-gaussienne est de la forme

$$E_{m,n}(x,y,z) = E_0 . \frac{w_0}{w(z)} . H_m\left(\sqrt{2}.\frac{x}{w(z)}\right) . H_n\left(\sqrt{2}.\frac{y}{w(z)}\right) . \mathrm{e}^{-i.k.z} . \mathrm{e}^{-i.\frac{k}{2}.\frac{x^2+y^2}{q(z)}} . \mathrm{e}^{i.\left[(m+n+1).\arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)\right]}$$

où $w(z)$ et $q(z)$ ont été définis plus tôt

$H_n(x) = (-1)^n . e^{x^2} . \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ sont les polynômes d'Hermite.

Remarque :

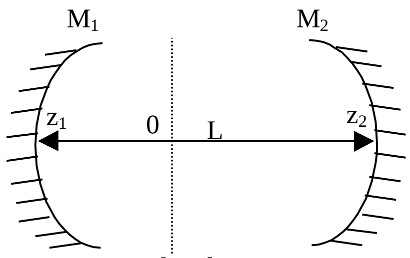
- $H_0(x) = 1$
- $H_1(x) = 2.x$
- $H_2(x) = 4.x^2 - 2$

Au champs électrique de la forme $E_{m,n}$, nous associons le mode $TEM_{m,n}$. En particulier, le mode $TEM_{0,0}$ est l'onde gaussienne étudiée jusqu'à maintenant. Les modes $TEM_{m,n}$ sont solutions de l'équation de propagation.

Voir annexe : Distribution spatiale en intensité pour différents modes transverses

3 – Fréquence de résonance

Nous étudions les ondes hermitienne-gaussienne dans la cavité suivante :



Nous étudions la propagation de l'onde $E_{m,n}$ sur l'axe ($E_{m,n}$ (0,0,z)).

Nous notons

- φ_1 la phase de l'onde au niveau du miroir M_1

$$\varphi_1 = -(m+n+1).\text{Arctan}\left(\frac{z_1}{z_R}\right) + k.z_1$$

- φ_2 la phase de l'onde au niveau du miroir M_2

$$\varphi_2 = -(m+n+1).\text{Arctan}\left(\frac{z_2}{z_R}\right) + k.z_2$$

En passant de M_1 à M_2, la phase de l'onde a changée de $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Après un tour, l'onde subit un déphasage supplémentaire de $2.\pi$ dû à la réflexion sur les deux miroirs M_1 et M_2. Ainsi, sur un tour, nous pouvons écrire que, pour que le mode soit stable dans la cavité,

$$2.\Delta\varphi = 2.p.\pi$$
$$p \in \aleph$$

Soit

$$2.\Delta\varphi = 2.k.(z_2 - z_1) - 2.(m+n+1).\left[Arc\tan\left(\frac{z_2}{z_R}\right) - Arc\tan\left(\frac{z_1}{z_R}\right)\right] = 2.p.\pi$$

Nous posons

$$\boxed{\Delta\xi = Arc\tan\left(\frac{z_2}{z_R}\right) - Arc\tan\left(\frac{z_1}{z_R}\right)}$$

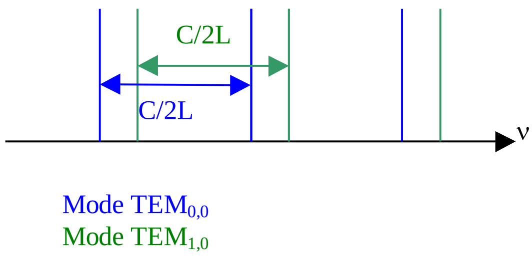
Ainsi

$$\frac{2.\pi.\nu}{c} - (m+n+1).\Delta\xi = p.\pi$$

Ainsi, la fréquence de l'onde qui résonnera dans la cavité est donnée par

$$\boxed{\nu = p.\frac{c}{2.L} + \frac{c}{2.\pi.L}.(m+n+1).\Delta\xi}$$

Peigne des fréquences pouvant osciller dans la cavité

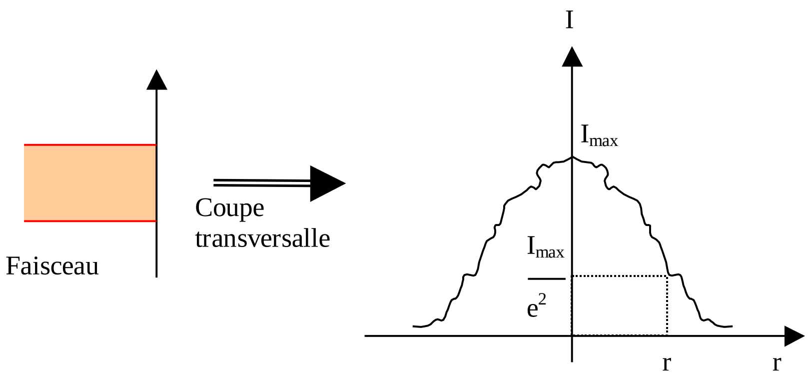


Nous remarquons que les fréquences qui peuvent osciller dépendent du mode considéré, et sont décalées les une par rapport aux autres. Ici, le peigne de fréquences pour le mode $TEM_{0,0}$ est simplement décalé par rapport au peigne de fréquences pour le mode $TEM_{1,0}$.

4 – Notion de *M²* : qualité spatiale d'un faisceau

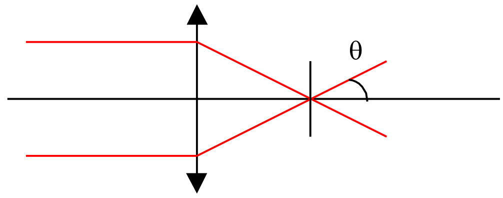
La superposition des modes $TEM_{m,n}$ font que le faisceau ressemble à « une grosse patate ». Le rayon sera plus épais que pour le mode $TEM_{0,0}$ seul.

Pour quantifier la qualité du faisceau transformé par les ondes $TEM_{m,n}$, nous définissons une nouvelle taille du faisceau.



Par analogie avec l'onde gaussienne, la taille *r* du faisceau est définit par $I(r) = \frac{I_{\max}}{e^2}$.

Ensuite, nous nous intéressons à la manière dont le faisceau converge après une lentille convergente.



Par analogie avec le waist du faisceau gaussien, nous notons r_0 le rayon du faisceau à l'endroit où il est le moins large.

Nous définissons le facteur *M* de qualité par

$$\boxed{M^2 = \frac{\pi.r_0.\theta}{\lambda}}$$

Dans le cas du faisceau gaussien :

$$r_0 = w_0 \text{ et } \theta = \frac{\lambda}{\pi.w_0}.$$

$$M^2 = 1$$

En règle générale, $M^2 > 1$ car $r_0 > r_{0,gaussien}$.

En gros, plus M^2 est grand, moins le faisceau est bon (plus il est difficile à focaliser). En effet, un faisceau gaussien diverge moins qu'un faisceau non gaussien.

Remarque :

- *Le choix de M^2 comme paramètre de qualité est très controversé à cause de la définition de la largeur r du faisceau qui n'est valable qu'à condition que I=f(r) ai une forme de cloche*

- *M^2 est le moment d'ordre 2.*

  Pour un faisceau gaussien,

$$w_0 = \frac{2.\iint \left(x^2 - \langle x\rangle^2\right) I.dx.dy}{\iint I.dx.dy}$$

où $\langle x\rangle = \frac{\iint I.x.dx.dy}{\iint I.dx.dy}$

CHAPITRE VI – SECURITE LASER

Voir polycopié titré 'Sécurité laser'

Ce polycopié comprend les parties suivantes

I – Effet du laser sur la peau

II – Effet du laser sur l'œil

III – Les normes

IV – Les précautions à prendre

CHAPITRE VIII – LES DIFFERENTES FAMILLES DE LASERS

Voir polycopié titré 'Les différentes familles de lasers'

Ce polycopié comprend les parties suivantes

I – Lasers à gaz

II – Lasers à colorant

III – Lasers solides

IV – Le marché des lasers

CHAPITRE IX – LES APPLICATIONS DU LASER

Voir polycopié titré 'Les applications du laser'

Ce polycopié comprend les parties suivantes

I – Rappel des propriétés du laser

II – Le marché des lasers en termes d'applications

III – Les principales applications